# EJERCICIOS DE MATRICES

**1º)** Escribir los siguientes sistemas en forma matricial:

**a)** $\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{array}\right\}$ ; **b)** $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-2y=3 \\ 6x+y=4 \end{array}\right\}$ ; **c)** $\left.\begin{array}{l} x+y \quad\;\; =0 \\ \quad\; y+z=1 \\ x+ \quad\; z=3 \end{array}\right\}$ ; **d)** $\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=4 \\ z=5 \end{array}\right\}$ ; **e)** x+y+z+t=3

**2º)** Halla la matriz traspuesta de las siguientes matrices:

**a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ; **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ; **e)** $(a \;\; b \;\; c \;\; d)$ ; **f)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

**3º)** Siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, calcula :

**a)** A+B−C ; **b)** 2A−B ; **c)** calcula X para que A+X+B = C

**4º)** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

**a)** $A \cdot B$ ; **b)** $B \cdot A$ ; **c)** $B^t \cdot A^t$ ; **d)** $C \cdot (A+B)$ ; **e)** $C \cdot (A^t+B)$ ; **f)** $(A+B^t) \cdot C$.

**5º)** Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , calcula : **a)** $A^2$ ; **b)** $A \cdot B \cdot C$ ; **c)** $(A-B) \cdot C$ ; **d)** $A \cdot A^t$ ; **e)** calcula X para que $A \cdot X = I$ (matriz unidad).

**6º)** Calcula, por el método de Gauss, la inversa de las matrices siguientes, si existe:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ; $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix}$.

**7º)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, comprobar que $A^2 = 2A - I$ , siendo I la matriz unidad. Usando la fórmula anterior, calcular $A^4$ .

***Similares: Ejemplos 11, 12, 13, 14, 15 y ejercicios: 6, 8, 9, 10, 11, del 12 al 34.***

**8º)** Una editorial lanza al mercado un nuevo libro del que hace tres ediciones: una en rústica, otra encuadernada y otra numerada. La editorial recibe pedidos de dos librerías A y B. La primera tiene por costumbre abonar el importe de los pedidos que realiza entregando inmediatamente el 50 % del total y aplazando el otro 50 % a 90 días. En esta ocasión, la librería A solicita 50 ejemplares en rústica, 20 encuadernados y 5 numerados. La librería B, que abona la cuarta parte al contado y aplaza el resto a 90 días, solicita 100, 10 y 10 ejemplares respectivamente. Expresar matricialmente el número de ejemplares de cada edición que la editorial cobra al contado y el número de los que tienen el pago aplazado.

**9º)** Tres compañías de productos derivados del petróleo instalan estaciones de servicio. A la salida de una población hay un surtidor de cada una; un día determinado las tres han vendido la misma cantidad : 2.500 l. de gasolina super y 890 l. de normal. La matriz de precios en pesetas, es: $\begin{array}{c|c} & \text{SUPER} \quad \text{NORMAL} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 72 & 65 \\ 70 & 65 \\ 71 & 64 \end{pmatrix} \end{array}$. Se pide: **a)** ¿ Cuáles fueron los ingresos de cada gasolinera ese día ?; **b)** ¿ Cuál es el significado del producto de la matriz $(1/3 \quad 1/3 \quad 1/3)$ por la obtenida en el apartado a) ?.

**10º)** Una fábrica de bolígrafos ($P_1$) , encendedores ($P_2$) y llaveros ($P_3$) requiere para su elaboración tinta ($M_1$), gas ($M_2$), metacrilato ($M_3$) y aleación metálica ($M_4$). Dos distribuidores ($D_1$ y $D_2$) se encargan de distribuir a los establecimientos comerciales los mencionados productos. Sea pues $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 500 & 300 & 1000 \\ 350 & 600 & 1000 \end{pmatrix} \end{array} = A$ la matriz de demanda de los tres productos por parte de los distribuidores, $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 0 & 50 & 10 \\ 0 & 20 & 60 & 5 \\ 0 & 0 & 30 & 30 \end{pmatrix} \end{array} = B$ la matriz que expresa, en gramos, la cantidad de cada uno de los cuatro materiales que entran en la formación de cada unidad del producto y $\begin{array}{cc} & K \\ \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{array} = C$ la matriz de los costos por gramo de cada uno de los materiales. Calcula e interpreta el significado de : **a)** A·B ; **b)** B·C ; **c)** A·B·C.

**11º)** Un fabricante produce tres tipos de clavos: de aluminio (A), de cobre (Q) y de acero (H). Todos ellos se fabrican en longitudes de 1, 1'5 , 2 y 2'5 cm. con los precios respectivos siguientes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Clavos A: | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 | pts |
| Clavos Q: | 0,30 | 0,45 | 0,60 | 0,75 | pts. |
| Clavos H: | 0,40 | 0,60 | 0,80 | 1 | pts. |

Sabiendo que en un minuto se producen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| De 1 cm. de longitud: | 100 A | 50 Q | 700 H |
| De 1,5 cm. de longitud: | 200 A | 20 Q | 600 H |
| De 2 cm. de longitud: | 500 A | 30 Q | 400 H |
| De 2,5 cm. de longitud: | 300 A | 10 Q | 800 H |

se pide: **a)** resumir la información anterior en dos matrices M y N . M será una matriz 3×4 que recoja la producción por minuto y N una matriz 4×3 que recoja los precios; **b)** calcular los elementos de la diagonal principal de la matriz M·N y dar su significado; **c)** hacer los mismo para la matriz N·M. [ *Selectividad, junio 1990*].

**12º)** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ debes probar que : **1)** A es matriz idempotente, es decir que $A^2 = A$; **2)** el sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas obtenido a partir del siguiente producto matricial es incompatible: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ [*Selectividad, sept. 92*].

**13º)** De una matriz $A_{n\times n}$ se sabe que es idempotente (es decir que se cumple $A^2 = A$). Se define $B = 2A-I$, donde I es la matriz unidad n×n. Calcular el producto $A^pB^qA^r$ , donde p, q y r son números enteros positivos. [*Selectividad, junio 94].*

**14º)** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide: **a)** demostrar que $A^2 = 2A - I$ , donde I es la matriz identidad 2×2 ; **b)** expresar $A^3$ y $A^4$ en función de A; **c)** calcular $A^{100}$ .[*Selectividad, septiembre 95]* .

**15º)** Un constructor construye chalets de lujo (C.L.), chalets adosados (C.A.) y viviendas de protección oficial (V.P.O.). Se sabe que cada C.L. tiene 3 cuartos de baño, 2 aseos y 2 cocinas, cada C.A. tiene 1 cuarto de baño, 1 aseo y 1 cocina, y cada V.P.O. tiene 1 aseo y 1 cocina. Por otra parte, cada cuarto de baño tiene una ventana grande y una pequeña; cada aseo tiene una ventana pequeña y cada cocina tiene 2 grandes y 1 pequeña. **a)** Hallar la matriz A que expresa el número de habitáculos (cocinas, cuartos de baño y aseos) en función de cada tipo de vivienda; **b)** hallar la matriz B que expresa el número de ventanas grandes y pequeñas en función el tipo de habitáculo; **c)** Hallar la matriz C que expresa el número de ventanas grandes y pequeñas en función del tipo de vivienda. ¿ Puede calcularse C como resultado de una operación matricial entre A y B ?; **d)** si al final del año ha construido 10 C.L.; 20 C.A. y 50 V.P.O., ¿ cuántas ventanas grandes y pequeñas ha empleado en la construcción? . Si el número de ventanas grandes y pequeñas se expresa por medio de una matriz D, ¿ cómo puede obtenerse esta a partir de la matriz C ?; **e)** sabiendo que el carpintero cobra 40.000 pts. por cada ventana grande y 20.000 pts. por cada pequeña, ¿ cuánto dinero tendrá que pagar el constructor al carpintero ? . Si este resultado se expresa mediante una matriz E, ¿ cómo puede obtenerse a partir de la matriz D ?. *(Selectividad, junio 96)*

**16º)** ¿ Pueden existir matrices cuadradas de orden 2 × 2, A y B, tales que verifiquen la ecuación A·B – B·A = I , donde I es la matriz identidad ?. *(Selectividad, junio 96)*

**17º)** Un cuadrado mágico de orden 2×2 es una matriz 2×2 de números enteros positivos tal que la suma de los elementos de las filas, columnas y diagonales coinciden. **a)** ¿ Existe algún cuadrado mágico de suma 1.995 ?; **b)** ¿ Cuántos cuadrados mágicos existen de suma 3.992 ?; **c)** Si un cuadrado es mágico, ¿ lo es también el que se obtiene al transponer la matriz ?; **d)** ¿ Cuándo la suma, diferencia y producto de cuadrados mágicos es otro cuadrado mágico ? [*Selectividad, septiembre 1996*]

## SOLUCIONES

**1º) a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

**d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ; **e)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix}$ .

**2º) a)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ ; **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ ; **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$; **e)** $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$; **f)** (x y z t).

**3º) a)** $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ; **b)** $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ ; **c)** $X = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -4 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

**4º) a)** $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; **b)** $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; **c)** $B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ ; **d)** imposible;

**e)** $C\cdot(A^t+B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 10 & 19 & 9 \end{pmatrix}$ **f)** $(A+B^t)\cdot C = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 12 & 15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

**5º)** $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 18 \\ 12 & 31 \end{pmatrix}$; **b)** $A\cdot B\cdot C = \begin{pmatrix} 9 & 19 \\ 15 & 31 \end{pmatrix}$; **c)** $(A-B)\cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; **d)** $A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 10 & 17 \\ 17 & 29 \end{pmatrix}$;

**e )** $X = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

**6º)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ ; $B^{-1}$ no existe ; $C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -1 \\ -3 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $D^{-1}$ no existe.

**13º)** A

**14º) a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 2A - I$ ; **b)** $A^3 = 3A - 2I$ ; $A^4 = 4A - 3I$ ; **c)** $A^{100} = 100A - 99I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}$

**15º) a)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; **b)** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; **c)** $C = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; sí : $C = A\cdot B$ ; **d)** nº ventanas grandes= nº ventanas pequeñas = 230; $D = (10\ \ 20\ \ 50)\cdot\begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (230\ \ 230)$ , **e)** 31.800.000 pts; $E = (230\ \ 230)\cdot\begin{pmatrix} 40.000 \\ 20.000 \end{pmatrix} = (31.800.000)$

**16º)** No; poniendo $C = A\cdot B - B\cdot A$ se obtiene que $c_{11} = -c_{22}$ , luego $C \neq I$.

**17º)** Obsérvese que si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es un cuadrado mágico $\Rightarrow a = b = c = d$, luego: **a)** No, pues a es entero positivo; **b)** Uno: $\begin{pmatrix} 1996 & 1996 \\ 1996 & 1996 \end{pmatrix}$; **c)** Sí; **d)** siempre

# EJERCICIOS DE DETERMINANTES

**1º)** Desarrollar por la regla de Sarrus :

**a)** $\begin{vmatrix} \sqrt{5}+3 & -3 \\ 2 & \sqrt{5}-3 \end{vmatrix}$ ; **b)** $\begin{vmatrix} \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos a \end{vmatrix}$ ; **c)** $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} a & \sec a \\ \sec a & \operatorname{tg} a \end{vmatrix}$ ; **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ ; **e)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ ;

**f)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ ; **g)** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ ; **h)** $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$ ; **i)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$ .

**2º)** ¿ Cuál es el determinante de la matriz unidad de orden n ?.

**3º)** Demuestra, sin desarrollar los determinantes, que: **a)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \dot{5}$; **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \dot{4}$.

**4º)** Justificar mediante las propiedades de los determinantes la igualdad:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 342 \\ 1 & 0 & 105 \\ 2 & 7 & 270 \end{vmatrix}.$$

**5º)** Calcular, efectuando previamente las transformaciones convenientes:

**a)** $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ ; **b)** $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & -13 & 5 \end{vmatrix}$ ; **c)** $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -9 & 13 \\ 12 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & -7 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 0 & 16 \end{vmatrix}$ ; **d)** $\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 4 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 15 & 3 & 7 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ ;

**6º)** Demostrar, sin desarrollarlos, que son nulos los siguientes determinantes:

**a)** $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$ ; **b)** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{vmatrix}$ ; **c)** $\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 & 21 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & b & c & a \\ 1 & c & a & b \\ 1 & 2a-b & 2b-c & 2c-a \end{vmatrix}$

**7º)** Demostrar, sin calcularlo, que el siguiente determinante es múltiplo de 11 : $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 9 & 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

**8º)** Resolver las siguientes ecuaciones: **a)** $\begin{vmatrix} x+2 & 6 & 1 \\ 4 & x+4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$ ; **b)** $\begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & x & 2 & 3 \\ 1 & 17 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0$;

**c)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & x-5 \\ 4 & 2+x & x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ ; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3x-6 & 4 & x+4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$.

**9º)** Halla la inversa de las siguientes matrices, en caso de que la posean, y comprueba el resultado:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ; $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$ ; $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ ; $E = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ ; $F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**10º)** Averigua para qué valores de a tiene inversa la matriz A = $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & a \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y calcúlala.

**11º)** Averigua para qué valores de a no tiene inversa la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$. Calcula $A^{-1}$ para a = 2, si es posible.

**12º)** Resuelve matricialmente los sistemas:

**a)** $\left.\begin{array}{r} x+2y=7 \\ 2x-y=4 \end{array}\right\}$ ; **b)** $\left.\begin{array}{r} x+4y=0 \\ 5x-6y=0 \end{array}\right\}$ ; **c)** $\left.\begin{array}{r} x+4y-z=8 \\ x+\ \ y+z=3 \\ 2x-y-z=0 \end{array}\right\}$ ; **d)** $\left.\begin{array}{r} -x+y+z=1 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{array}\right\}$

**13º)** Resuelve por la regla de Cramer, si es posible, los sistemas:

**a)** $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x-y=3 \end{array}\right\}$ ; **b)** $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{array}\right\}$ ; **c)** $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ 2x+2y=3 \end{array}\right\}$ ;

**d)** $\left.\begin{array}{r} 2x-y-z=0 \\ x+y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{array}\right\}$ ; **e)** $\left.\begin{array}{r} 2x-y+3z=1 \\ 4x-2y-z=-3 \\ 2x+y-4z=-4 \end{array}\right\}$ ; **f)** $\left.\begin{array}{lr} 2x-3y & =0 \\ x & +3z=0 \\ -x & +y-z=0 \end{array}\right\}$

**14º)** Indicar las propiedades de los determinantes que permiten escribir las siguientes igualdades: **1)** $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ ; **2)** $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$.[*Sel. jun. 92*]

**Ejercicios recomendados de la lección 4 del texto**: 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43.

# SOLUCIONES

**1º) a)** 2; **b)** $\text{sen}^2 a$ ; **c)** –1; **d)** 14 ; **e)** 45 ; **f)** 3 ; **g)** -70 ; **h)** 2 a b c ; **i)** $3abc - a^3 - b^3 - c^3$ .

**2º)** 1

3º) **a)** A la 1ª columna se le suma la 2ª y se le resta la 3ª ; **b)** a la 1ª columna se le suman la 2ª y la 3ª.

**4º)** En el primer determinante, sumamos a la 3ª columna la 1ª multiplicada por 100 y la 2ª multiplicada por 10, con lo que se obtiene el segundo determinante.

**5º) a)** -16 ; **b)** -27 ; **c)** 11440 ; **d)** 2184 ; **e)** a b c + a b d + +a c d + + b c d + a b c d ; **f)** a(b–a)(c–b)(d–c)(e–d)

**6º) a)** (3ª col.) = (3ª col.)+(2ª col.) con lo que resulta la 3ª columna múltiplo de la 1ª ; **b)** Restando a cada columna la anterior; **c)** Restando a la 1ª fila la 3ª; **d)** sumando a la 4ª columna la 2ª y la 3ª.

**7º)** Obsérvese que los números 5093, 3080, 5654 y 9361 son múltiplos de 11, luego sumando a la 4ª columna la 1ª multiplicada por 1000, la segunda por 100 y la tercera por 10, se obtiene una columna de múltiplos de 11.

**8º) a)** x =–4, x = 3; **b)** x = –6; **c)** x = 0, x = 6 ; **d)** x = 5/2.

**9º)** $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ; $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5/2 \\ 2 & -3/2 \end{pmatrix}$; C no tiene inversa; $D^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 7 \\ 5 & 8 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ;

$E^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 23 & 13 & -25 \\ -20 & -12 & 22 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; F no tiene inversa.

**10º)** Si a = 5 no tiene inversa. Para $a \neq 5$ se tiene :

$$A^{-1} = \frac{1}{49a - 245}\begin{pmatrix} 20 & -35 & 7a-20 \\ 7a-15 & -35 & 15 \\ -28 & 49 & -21 \end{pmatrix}.$$

**11º)** A tiene inversa si $a \neq 1$ y $a \neq 3$. Para a = 2 $\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

**12º) a)** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; **b)** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; **c)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$ ; **d)** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**13º) a)** x = 4/3, y = –1/3 ; **b)** x = 0 ; y = 0 ; **c)** no es posible (es incompatible); **d)** x = 0 , y = 0 , z = 0 ; **e)** x = –4/7 , y = 0 ; z = 5/7; **f)** no es posible.