2. ▶ DETERMINANTES

EJERCICIOS

2.1. **Calcular los siguientes determinantes de orden 2:**

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$

Los valores de estos determinantes son:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 15 = -7$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

d) $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$

e) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 = 7$

f) $\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -35 - 8 = -43$

g) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

h) $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$

i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

j) $\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -21 - 6 = -27$

2.2. **Calcular los siguientes determinantes de orden 3:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4 + 0 - 6 - 0 - 10 = -15$

b) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 30 + 12 - 3 + 30 - 60 = -36$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 36 - 10 + 8 - 12 - 45 = -11$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 + 6 - 7 + 8 = 0$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 8 + 54 - 24 + 6 - 6 = 36$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 1 - 5 = -1$

g) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -30 + 128 + 100 - 100 + 40 - 96 = 42$

h) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 8 + 8 + 8 + 8 + 8 - 8 = 32$

2.3. **Calcular los siguientes determinantes de orden 4:**

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[F_3 - 3F_2]{F_1 + 2F_2} \begin{vmatrix} 8 & -1 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ -6 & 8 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & -1 & 8 \\ -6 & 8 & -2 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -286$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow[C_4 - 2C_1]{C_3 + C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & 8 & -9 \end{vmatrix} = -72$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_4 - C_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$

2.4. **Hallar una solución de la ecuación siguiente sin desarrollar el determinante e indicando la propiedad que se aplica:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Una solución es un valor de x que anula al determinante.

Se trata ahora de buscar un valor de x que anule al determinante.

— Si $x = 1$, la matriz del determinante tiene las tres filas iguales, luego su determinante es 0.

— Si $x = -1$, la matriz del determinante tiene dos filas iguales, la primera y la tercera, luego su determinante es 0.

2.5. **Resolver, aplicando las propiedades de los determinantes, pero sin desarrollar, la ecuación de segundo grado:**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$$

Una solución es un valor de x que anula al determinante.

Se trata de hallar dos valores tales que al sustituir la x por ellos el determinante sea 0.

— Si $x = b$, la primera fila y la segunda son iguales, luego el determinante es 0.

— Si $x = c$, la primera fila y la tercera son iguales, luego el determinante es 0.

No es necesario intentarlo con más valores, ya que la ecuación de segundo grado tiene como máximo dos soluciones reales.

2.6. **Resolver la siguiente ecuación:** $\begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0$

Por tratarse de una ecuación de tercer grado, tiene como máximo 3 soluciones reales.

— Si $x = a$, las dos primeras filas son iguales, luego el determinante es 0; por tanto, $x = a$ es una raíz de la ecuación.

— Si $x = b$, las filas segunda y tercera son iguales, luego el determinante es 0; por tanto, $x = b$ es una raíz de la ecuación.

— Si $x = -(a + b)$, al sumar las columnas restantes a una de ellas se obtiene una columna de ceros, luego el valor del determinante es 0; por tanto, $x = -(a + b)$ es una raíz del polinomio.

2.7. **Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante es múltiplo de 15:** $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

Sumando a la tercera columna la primera multiplicada por 100 más la segunda multiplicada por 10, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 150 \\ 2 & 2 & 225 \\ 2 & 5 & 255 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 2 & 15 \\ 2 & 5 & 17 \end{vmatrix}$$

Por tanto, el determinante es múltiplo de 15.

2.8. **Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante vale 0:** $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

Sumando a la tercera columna la segunda, se obtiene: $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = 0$

Observar que el segundo determinante tiene dos columnas proporcionales: la primera y la tercera. Por tanto, el determinante es nulo.

2.9. **Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante vale 0:** $\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$

Sumando a la cuarta columna la segunda y la tercera, se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & a+b+c+d \\ 1 & c & d & a+b+c+d \\ 1 & d & a & a+b+c+d \end{vmatrix} = 0$$

Observar que el segundo determinante tiene dos columnas proporcionales: la primera y la cuarta. Por tanto, el determinante es nulo.

2.10. **Sabiendo que: Det A =** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$

calcular razonadamente el valor de: Det(B) = $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$

Aplicando las propiedades de los determinantes:

— producto por un número (paso primero), y

— permutación de filas y columnas (pasos segundo y tercero),

se tiene: $\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 8 \cdot 25 = 200$

2.11. **Sabiendo que Det A =** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

calcular los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) Para pasar al determinante dado:

— Se saca el factor 2 de la primera fila.

— Se saca el factor $\frac{1}{2}$ de la segunda fila.

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

b) Para pasar al determinante dado:

— Se resta a la segunda fila 3 veces la primera.

— Se resta a la tercera fila la primera.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

c) Para pasar al determinante dado:

— Se suma a la primera fila la tercera.

— Se resta a la segunda fila la tercera.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

2.12. **Sabiendo que Det A =** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix}$ **= 3, calcular Det B =** $\begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2c & 2b \end{vmatrix}$

Se saca el factor de 2 de cada una de las filas:

$$\text{Det } B = \begin{vmatrix} 2x & 2z & 2y \\ 2m & 2p & 2n \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} x & z & y \\ m & p & m \\ a & c & b \end{vmatrix}$$

Se permuta la primera fila y la tercera (cambio de signo):

$$\text{Det } B = 8 \begin{vmatrix} x & z & y \\ m & p & n \\ a & c & b \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} a & c & b \\ m & p & n \\ x & z & y \end{vmatrix}$$

Se permuta la segunda fila y la tercera (cambio de signo):

$$\text{Det } B = 8 \begin{vmatrix} a & c & b \\ m & p & n \\ x & z & y \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ m & p & n \end{vmatrix}$$

Se permuta la segunda columna y la tercera (cambio de signo):

$$\text{Det } B = 8 \begin{vmatrix} a & c & b \\ x & z & y \\ m & p & n \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ m & n & p \end{vmatrix} = -8 \cdot 3 = -24$$

2.13. Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

— Las columnas C_1 y C_2 son linealmente independientes $\Rightarrow$ rango (A) ≥ 2.

— $\text{Det}(C_1, C_2, C_3) = 0$.

Por tanto, la tercera columna depende de las dos primeras.

— $\text{Det}(C_1, C_2, C_4) = 0$.

Por tanto, la tercera columna depende de las dos primeras.

— El rango de la matriz es 2.

2.14. Calcular los valores de t para los que el rango de la siguiente matriz es 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & t \end{pmatrix}$

Las columnas C_1 y C_2 son iguales. Luego el rango de C_1, C_2 y C_3 es igual al rango de C_1 y C_3.

— Si $t = 3$, entonces el rango de C_1 y C_3 es 1.

— Si $t \neq 3$, entonces el rango de C_1 y C_3 es 2.

2.15. Calcular el rango de la siguiente matriz para los distintos valores de t: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & t \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

La columna $C_2 = 2\,C_1$ y la columna $C_3 = 3\,C_1$, luego: Rango A = Rango (C_1, C_4).

a) $t \neq 4$.

Rango A = 2, ya que C_1 y C_4 no son proporcionales.

b) $t = 4$.

Rango A = 1, ya que $C_4 = 4\,C_1$.

2.16. Averiguar para qué valores del parámetro t la matriz A no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de A para t = 2, si es posible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & t & 3 \\ 4 & 1 & -t \end{pmatrix}$$

$\text{Det } A = -t^2 + 4t - 3$.

$\text{Det } A = 0 \Rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$.

Solución: $t = 3$, $t = 1$.

Si $t = 3$ o $t = 1$, entonces Det A = 0. Por tanto, la matriz no tiene inversa.

Si $t = 2$, la matriz A tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Det A = 1.

Adjuntos: $A_{11} = -7$ $\quad A_{12} = 12$ $\quad A_{13} = -8$

$A_{21} = -1$ $\quad A_{22} = 2$ $\quad A_{23} = -1$

$A_{31} = 2$ $\quad A_{32} = -3$ $\quad A_{33} = 2$

La matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.17. Resolver la ecuación BX = C, siendo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si existe matriz inversa de B, se tiene: BX = C es equivalente a $X = B^{-1} \cdot C$.

Matriz inversa:

$\text{Det}(B) = 1$. $\quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz X: $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.18. Dada la matriz: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$

donde m es un parámetro real, se pide:

a) Determinar el rango de M según los distintos valores de m.

b) Calcular el determinante de M si m = 3. Justificar si esta matriz tiene inversa.

c) Dar un valor de m para que la matriz M sea singular (no admita inversa).

a) $\text{Det } M = 2m^2 + 2m - 4$.

$\text{Det } M = 0$ implica $2m^2 + 2m - 4 = 0$.

Soluciones: $m = 1$, $m = -2$.

— Si $m = 1$ o $m = -2$, entonces Rango M = 2.

— Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, entonces Rango M = 3.

b) Si $m = 3$, entonces Det M = 20.

Por tanto, la matriz M tiene inversa.

c) Si $m = 1$ o $m = -2$, entonces Det M = 0.

Por tanto, la matriz no tiene inversa.

2.19. **Si A es la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, calcular la matriz $B = (A^t \cdot A^{-1})^2$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.**

Hallar el determinante de la matriz $(A^t \cdot A^{-1})^{276}$.

a) Matriz traspuesta $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Matriz inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Matriz producto $A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Matriz B $B = (A^t \cdot A^{-1})^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) Det B = 1, luego $\det (A^t \cdot A^{-1})^{276} = \det B^{138} = 1$.

2.20. **Hallar la matriz X tal que AX = B, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$**

Si existe matriz inversa, se tiene: $AX = B$ es equivalente a $X = A^{-1} \cdot B$.

Det(A) = 1.

Matriz inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz X: $X = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -32 \\ -6 & 13 \end{pmatrix}$

2.21. **Hallar la matriz X tal que AX = B + 2C, siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Explica cómo justificarías que la matriz obtenida es regular.

Si existe matriz inversa, se tiene: $AX = B + 2C$ es equivalente a $X = A^{-1} (B + 2C)$.

Det(A) = 6.

Matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz X: $X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 15 & 11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Det(X) = 4, luego es regular.

2.22. **Resolver razonadamente (explicando las propiedades que se utilizan en cada caso) la ecuación matricial AX + B = 2C y aplicar el resultado a las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si existe matriz inversa, se tiene: $AX + B = 2C$ es equivalente a $X = A^{-1} (2C - B)$.

Det(A) = −2.

Matriz inversa: $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz X: $X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

2.23. **a) Calcular una matriz X que verifique la igualdad $A \cdot X = B$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$**

b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?

a) Si existe matriz inversa, se tiene: $AX = B$ es equivalente a $X = A^{-1} \cdot B$.

Matriz inversa utilizando la definición: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz X . $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

b) Si existe matriz inversa, se tiene: $XA = B$ es equivalente a $X = BA^{-1}$.

El valor de la matriz X es para este segundo caso: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

Puesto que las dos soluciones matrices X no son iguales, la primera no verifica la segunda ecuación.

2.24. **a) Hallar k para que la matriz A no tenga inversa: $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}$**

b) Calcular la inversa de A para k = 3.

a) Det A = $-2k^2 + 4k + 8$.

Det A = 0 implica $-2k^2 + 4k + 8 = 0$.

Soluciones: $k = 1 + \sqrt{5}$, $k = 1 - \sqrt{5}$.

La matriz no tiene inversa cuando $k = 1 + \sqrt{5}$ o $k = 1 - \sqrt{5}$.

b) Cálculo de la matriz inversa de A para k = 3, $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Determinante de A: det A = 2.

Matriz adjunta de A: $\text{adj } A = \begin{pmatrix} -6 & 12 & -8 \\ 3 & -5 & 4 \\ 5 & -9 & 6 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de A: $A^{-1} = \frac{1}{\text{Det } A} \cdot \text{adj } A^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -6 & 3 & 5 \\ 12 & -5 & -9 \\ -8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 6 & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.25. **Demostrar, sin desarrollar, que el siguiente determinante es nulo: Det A = $\begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ b & 5b & 6b \\ c & 7c & 8c \end{vmatrix}$**

La tercera columna es igual a la suma de las otras dos.

Por tanto, las columnas son linealmente dependientes y el determinante es nulo.

2.26. **Calcular el siguiente determinante conocido con el nombre de determinante de Vandermonde:**

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Comprobar que si a, b y c son distintos entre sí, el determinante es distinto de 0.

Restando a la tercera columna la segunda multiplicada por a y a la segunda la primera multiplicada por a, se tiene:

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-ab \\ 1 & c-a & c^2-ac \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila: $\text{Det } A = \begin{vmatrix} b-a & b(b-a) \\ c-a & c(c-a) \end{vmatrix}$

Sacando factor común $b-a$ y $c-a$, resulta: $\text{Det } A = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

Si a, b y c son distintos entre sí, $(b-a)(c-a)(c-b)$ es distinto de 0. Luego el determinante es distinto de 0.

2.27. **Resolver, sin desarrollar, aplicando y justificando las propiedades utilizadas de los determinantes:**

$$\text{Det } A = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$$

Sacando factor común en cada fila a, b y c, se tiene: $\text{Det } A = a\,b\,c \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

Restando a la tercera columna la segunda multiplicada por a y a la segunda la primera multiplicada por a, se tiene:

$$\text{Det } A = a\,b\,c \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-ab \\ 1 & c-a & c^2-ac \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila: $\text{Det } A = a\,b\,c \begin{vmatrix} b-a & b(b-a) \\ c-a & c(c-a) \end{vmatrix}$

Sacando factor común $b-a$ y $c-a$, resulta: $\text{Det } A = a\,b\,c\,(b-a)\,(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = a\,b\,c\,(b-a)\,(c-a)\,(c-b)$

2.28. **Calcular:** $\text{Det } A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

Sumando a la primera columna las restantes, se tiene que: $\text{Det } A = \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 & 1 \\ a+3 & a & 1 & 1 \\ a+3 & 1 & a & 1 \\ a+3 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

Sacando factor común $a+3$: $\text{Det } A = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

Restando la primera fila a cada una de las restantes:

$$\text{Det } A = (a+3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a+3)\,(a-1)^3$$

Observar que la última matriz es triangular.

2.29. **Razonar las siguientes igualdades:**

a) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 24 & 100 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Para pasar del primer determinante a los siguientes:

— Primer paso: A la segunda fila se le resta 12 veces la primera.

— Segundo paso: Se saca el factor 2 de la primera fila y el 4 de la segunda.

b) $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Para pasar del primer determinante a los siguientes:

— Primer paso: Se saca el factor 5 de la primera fila y el 3 de la segunda.

— Segundo paso: Se suma a la tercera fila la primera.

2.30. **Resolver la ecuación:** $\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 67$

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 2x \\ 8 & x-1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4x^2 + 7x + 10$$

Igualando: $4x^2 + 7x + 10 = 67$.

Operando: $4x^2 + 7x - 57 = 0$.

Soluciones: $x = -4{,}75$, $x = 3$.

2.31. **Resolver la ecuación** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = 1 - 7x$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x-1 & 0 & x+3 \\ 1 & x-2 & 4 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 3$$

Igualando: $x^2 - 4x + 3 = 1 - 7x$.

Operando: $x^2 + 3x + 2 = 0$.

Soluciones: $x = -1$, $x = -2$.

2.32. **Considerar una matriz cuadrada A cuyo determinante es igual a d; es decir, $|A| = d$.**

Si $-A$ es la matriz opuesta de A, calcular $|-A|$ en los siguientes casos:

a) **A es una matriz de orden 2×2.**

b) **A es una matriz de orden 3×3.**

c) **A es una matriz de orden $n \times n$.**

Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se multiplican por un número, su determinante queda multiplicado por ese número.

Si se cambia una fila o columna de signo, el determinante cambia de signo.

Por tanto, lo que importa es si la matriz tiene un número impar o par de filas o columnas para que su determinante cambie de signo o no.

Según eso:

a) Número de filas par: $|-A| = d$.

b) Número de filas impar: $|-A| = -d$.

c) Número de filas n: $|-A| = (-1)^n\, d$.

2.33. **Determinar una matriz cuadrada A de orden 2, tal que $A + A^t = 2I$ y $Det(A) = 2$, siendo I la matriz identidad y A^t la traspuesta de la matriz A.**

Sea A la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$Det\ A = ad - bc$.

Si $A + A^t = 2\,I$, se tiene: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operando, se tiene: $\begin{cases} 2a = 2 \\ b + c = 0 \\ 2d = 2 \end{cases}$ de donde $a = 1,\ d = 1$

Utilizando ahora $Det\ A = 2$, se tiene el sistema: $\begin{cases} b + c = 0 \\ 1 - cb = 2 \end{cases}$ de donde $1 + c^2 = 2$

Resolviendo: $c = \pm 1,\ b = \pm 1$.

Las matrices posibles son: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

2.34. **Demostrar que el siguiente determinante es divisible por 21:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

(Indicación: No intentar desarrollarlo; aplicar las propiedades de los determinantes.)

Sumando las cinco primeras columnas a la sexta, se tiene que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 21 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 21 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 21 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 21 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 21 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 21 \end{vmatrix}$$

La última columna tiene como factor común 21, luego el determinante es divisible por dicho valor.

2.35. **Determinar una matriz cuadrada de orden 2, con determinante igual a −1, de forma que su inversa coincida con su traspuesta.**

Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$Det\ A = ad - bc = -1$: $A^{-1} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

Si $A^{-1} = A^t$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{de donde} \quad \begin{cases} a = -d \\ b = c \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en $Det\ A = ad - bc = -1$, se tiene: $-a^2 - c^2 = -1$, de donde $a^2 + c^2 = 1$

Las matrices posibles son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \pm\sqrt{1 - a^2} \\ \pm\sqrt{1 - a^2} & -a \end{pmatrix}$$

2.36. **Dos matrices A y B son inversas y además todos sus elementos son números enteros. ¿Cuáles son los valores posibles de Det(A) y Det(B)?**

Si A y B son inversas, se tiene que $A\ B = I$.

Por tanto, $det(AB) = det\ A\ det\ B = 1$.

Puesto que los elementos de las matrices son números enteros, se tiene que: $det\ A = 1$ y $det\ B = 1$

o bien: $det\ A = -1$ y $det\ B = -1$

2.37. **Siendo A, B y C matrices cuadradas del mismo orden, es sabido que de la igualdad AB = AC no puede deducirse siempre que sea B = C. Probar, no obstante, que si el determinante de A es distinto de 0, sí puede obtenerse la conclusión B = C.**

Por ejemplo, si A es la *matriz* nula de orden *n* para cualquier par de matrices cuadradas B y C de orden *n*, se tiene que $AB = AC$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora que para que pueda aplicarse la propiedad simplificativa la matriz A debe ser inversible. Si Det(A) es distinto de 0, entonces la matriz A tiene inversa.

Sea A una matriz inversible.

Se tiene $AB = AC$.

Multiplicando por A^{-1}: $A^{-1} \cdot AB = A^{-1} \cdot AC$.

Operando: $I_n\ B = I_n\ C$, I_n matriz unidad.
Operando: $B = C$.

2.38. **En una granja se venden pollos, pavos y perdices a razón de 2, 1,50 y 4 €/kg, respectivamente. En cierta semana los ingresos totales de la granja ascendieron a 5 700 euros.**

Además, se sabe que la cantidad de pollo vendida superó en 100 kg a la de pavo y que se vendió de perdiz la mitad que de pavo.

a) Plantear un sistema de ecuaciones para averiguar la cantidad vendida de cada tipo de carne.

b) Expresar matricialmente el problema.

c) ¿Cuántos kg se vendieron de cada tipo?

d) Calcular el determinante de la matriz asociada al sistema.

e) ¿Qué rango tiene la matriz ampliada?

Sean x, y, z el número de kilogramos de pollo, pavo y perdiz, respectivamente.

a) El sistema resultante es: $\begin{cases} 2x + 1{,}50y + 4z = 5\,700 \\ x - y = 100 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

b) El sistema en forma matricial es: $\begin{pmatrix} 200 & 150 & 400 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,700 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Resolviendo el sistema directamente o en forma matricial, se tiene: $x = 1\,100$, $y = 1\,000$, $z = 500$.

Se vendieron 1 100 kg de pollo, 1 000 kg de pavo y 500 kg de perdiz.

d) Determinante de la matriz de los coeficientes (= matriz del sistema):

$$\text{Det}\begin{pmatrix} 200 & 150 & 400 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 400 + 400 + 300 = \mathbf{1\,100}$$

e) Puesto que el determinante de la matriz del sistema es distinto de 0, el rango de la matriz es 3, luego la matriz ampliada tiene también rango 3.

2.39. Una empresa de construcción compra x toneladas de hierro e y toneladas de hormigón mensuales, para producir x + 3y lotes de ladrillos y 2x + y lotes de viguetas. Plantear matricialmente la producción y buscar, también matricialmente, cuántas toneladas de hierro y hormigón se necesitan para fabricar en un mes 70 lotes de ladrillos y 30 lotes de viguetas.

a) Matriz de producción: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) Ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix}$

Multiplicando por la matriz inversa resulta: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \end{pmatrix}$

Por tanto, $x = 4$ toneladas de hierro, $y = 22$ toneladas de hormigón.

CUESTIONES

2.40. a) ¿Qué condiciones tiene que cumplir una matriz cuadrada para que sea inversible?

b) Poner un ejemplo de matriz cuadrada que sea inversible y calcular su inversa.

c) Si A es una matriz cuadrada inversible, ¿es su traspuesta inversible?

a) La condición puede ser cualquiera de las siguientes:

Que las filas sean linealmente independientes.

Que las columnas sean linealmente independientes.

Que el rango de la matriz sea n siendo el orden de la matriz n.

Que el determinante sea distinto de 0.

b) Respuesta abierta, basta con tomar una matriz que cumpla alguna de las condiciones del apartado anterior.

Sea, por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Det A = 1.

Adjuntos:
$A_{11} = -7$ $A_{12} = 12$ $A_{13} = -8$
$A_{21} = -1$ $A_{22} = 2$ $A_{23} = -1$
$A_{31} = 2$ $A_{32} = -3$ $A_{33} = 2$

La matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) La respuesta es sí, ya que el rango por filas o por columnas es el mismo.

2.41. Dos matrices cuadradas A y B son inversas. Si Det A = 3, ¿cuánto vale Det B?

Se tiene: $A\,B = I$

luego, $1 = \text{Det } I = \text{Det}(A \cdot B) = \text{Det } A \cdot \text{Det } B$.

Sustituyendo: $3 \cdot \text{Det } B = 1$.

Por tanto: $\text{Det } B = \frac{1}{3}$.

2.42. Una matriz cuadrada A verifica la relación $A^2 = A$. ¿Es Det A = 0 o Det A = 1?

Se tiene: $\text{Det}(A^2) = \text{Det } A \cdot \text{Det } A = \text{Det } A$.

Operando: $\text{Det } A \cdot \text{Det } A - \text{Det } A = 0$.

Sacando factor común: $\text{Det } A\,[\text{Det } A - 1] = 0$.

Resolviendo: $\text{Det } A = 0$ o $\text{Det } A = 1$.

2.43. Se multiplica una matriz cuadrada A por Adj A^t. ¿Qué tipo de matriz se obtiene? ¿Cuánto valen sus elementos?

Se obtiene la matriz diagonal Diag (Det A, Det A, ..., Det A).

2.44. Se sabe que $\text{Det}(F_1, F_2, F_3) = 7$. ¿Cuánto vale $\text{Det}(3\,F_1, F_2, F_3)$?

Si se multiplica una fila o columna de un determinante por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número.

Aplicando este resultado, se tiene: $\text{Det}(3\,F_1, F_2, F_3) = 3 \cdot \text{Det}(F_1, F_2, F_3) = 3 \cdot 7 = 21$.

2.45. Se sabe que $\text{Det}(F_1, F_2, F_3) = 9$. ¿Cuánto vale $\text{Det}(F_1, F_1 + F_2, F_3)$?

Si se suma a una fila de un determinante otra fila, el determinante no varía.

$$\begin{aligned} \text{Det}(F_1, F_1 + F_2, F_3) &= \text{Det}(F_1, F_1, F_3) + \text{Det}(F_1, F_2, F_3) \\ &= \text{Det}(F_1, F_2, F_3) \\ &= 9 \end{aligned}$$

2.46. Se sabe que Det A = 5. ¿Cuánto vale Det(3A)?

Para el caso de una matriz de orden 3, se tiene: $\text{Det}(3 \cdot A) = \text{Det}(3\,F_1, 3\,F_2, 3\,F_3) = 3 \cdot 3 \cdot 3\,\text{Det}(A) = 135$.

En general, si es de dimensión $n \times n$, $\text{Det } A = 3^n \cdot 5$.

2.47. A es una matriz cuadrada de orden 3 y k un número real distinto de cero. ¿Es $\det(k\,A) = k^3 \cdot \det A$?

Una de las propiedades de los determinantes es: $\det(k \cdot F_1, F_2, F_3) = k \det(F_1, F_2, F_3)$.

Aplicando esta propiedad tres veces, se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Det}(k\,A) &= \text{Det}(k \cdot F_1, k \cdot F_2, k \cdot F_3) \\ &= k \cdot k \cdot k\,\text{Det}(F_1, F_2, F_3) \\ &= k^3\,\text{Det } A \end{aligned}$$

2.48. Una matriz cuadrada tiene todos sus elementos distintos de cero y su determinante, sin embargo, es 0. ¿Qué puede decirse de las filas o de las columnas de esa matriz?

Las filas y las columnas son linealmente dependientes, ya que en caso contrario su determinante es distinto de 0.

2.49. Si todos los elementos de una fila de una matriz cuadrada son ceros, sabemos que el determinante asociado es nulo. ¿Cuántos elementos nulos puede tener una matriz de tercer orden, sin que su determinante valga cero?

Para que un determinante sea distinto de 0 debe existir algún término del desarrollo distinto de caro; es evidente que lo mínimo es un término.

Puesto que cada término del desarrollo tiene un elemento de cada fila y otro de cada columna, el número de elementos distintos de 0 deben ser al menos n, siendo n orden del determinante.

Un determinante de orden 3 puede tener como máximo 6 términos nulos.

Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

En general, el número máximo de elementos nulos que puede tener es $n^2 - n$.

2.50. Un alumno suma y resta filas para simplificar los números que aparecen en un determinante. ¿Puede hacerlo sin alterar el valor del determinante?

Puede hacerlo, siempre que a una fila le sume o reste otra fila paralela, no ella misma. Esta es una de las propiedades de los determinantes.

Un ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 + 16 - 10 - 4 = 4$

Sumando a la segunda fila la primera, se tiene: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 6 + 24 - 4 - 15 - 12 = 4$

Ambos resultados son iguales.

2.51. Poner un ejemplo de una matriz 3 × 3 que tenga:

a) Rango 0 **b) Rango 1**

c) Rango 2 **d) Rango 3**

a) $r\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

b) $r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$; o también $r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = 1$

c) $r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$; o también $r\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2$

d) $r\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$