1 ► MATRICES

EJERCICIOS

1.1. **Averiguar si son iguales las siguientes matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 5^2 - 4^2 & 4 + 9 + 12 \\ -\frac{6}{3} & (2 - 1)\ (2 + 1) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} (5 + 4)\ (5 - 4) & 5^2 \\ -2 & 2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar son iguales. Comprobamos esto para los elementos de las matrices:

a_{11}: $5^2 - 4^2 = (5 + 4)\ (5 - 4)$ $\qquad$ a_{21}: $-\frac{6}{3} = -2$

a_{12}: $4 + 9 + 12 = 25 = 5^2$ $\qquad$ a_{22}: $(2 - 1)\ (2 + 1) = 2^2 - 1$

Por tanto, las matrices dadas son iguales.

1.2. **Sea A la matriz de una sola fila (2 1 5) y B la de una sola columna $(3\ 2\ 4)^t$. Escribir los productos AB y BA.**

Producto AB: $(2\ 1\ 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (28)$

Producto BA: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot (2\ 1\ 5) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 15 \\ 4 & 2 & 10 \\ 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}$

1.3. **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**, calcular: A + B, A − B.**

a) Suma A + B: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) Diferencia A − B: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.4. **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular: AB, BA, AA, BB.**

Producto AB: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

Producto BA: $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Producto AA: $A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 18 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Producto BB: $B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1.5. **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular: AB, BA, AA, BB.**

Producto AB: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ -1 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

Producto BA: $B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 & 9 \\ 0 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Producto AA: $A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 10 \\ 8 & 10 & 14 \end{pmatrix}$

Producto BB: $B \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 5 \\ -24 & 0 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

1.6. **Calcular AB y BA, si es posible, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$**

Orden de AB: $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3) = 3 \times 3$. El producto es posible.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

Orden de BA: $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 2 \times 2$. El producto es posible.

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}$$

1.7. **Calcular $A^2 - 3B - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**

Sustituyendo: $A^2 - 3B - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Operando: $A^2 - 3B - I = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 18 & 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sumando: $A^2 - 3B - I = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 0 \\ 15 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

1.8. **Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisface la relación de recurrencia: $A^n = 2^{n-1} A$.**

Operando, se tiene:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\,A = 2^1 \cdot A$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4\,A = 2^2\,A$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = 8\,A = 2^3\,A$$

....

Y por recurrencia o inducción se obtiene la fórmula pedida, como se puede comprobar fácilmente.

1.9. **Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$**

Operando, se tiene:

$A^2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix}$ $\quad A^4 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{pmatrix}$

Y por recurrencia o inducción, suponiendo que se cumple para $n-1$, se sigue que:

$$A^n = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a^{n-1} & (n-1)a^{n-2} \\ 0 & a^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & n\,a^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$$

1.10. **Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**

Operando, se tiene:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \\ 27 & 27 & 27 \end{pmatrix}$$

....

Y por recurrencia o inducción, suponiendo que se cumple para $n-1$, se sigue que:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \\ 3^{n-2} & 3^{n-2} & 3^{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

1.11. **Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y comprobar el resultado multiplicándola por la matriz dada.**

Dos matrices son inversas cuando su producto es la matriz unidad.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando, se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones lineales: a) $\begin{cases} 2x + 3z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2y + 3t = 0 \\ y + t = 1 \end{cases}$

Resolviéndolos, resulta: $x = -1$, $y = 3$, $z = 1$, $t = -2$

Y la matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Multiplicando esta matriz por la matriz debe dar la matriz unidad, si el problema está bien resuelto:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.12 **Aplicando la definición de matriz inversa, calcular la inversa de la siguiente matriz diagonal: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$**

Dos matrices son inversas cuando su producto es la matriz unidad.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} x = 1, & y = 0, & z = 0 \\ m = 0, & 2n = 1, & p = 0 \\ u = 0, & v = 0, & 3w = 1 \end{array}$$

A partir de aquí se obtiene inmediatamente la matriz inversa: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

1.13. **Hallar, por el método de reducción o de Gauss, la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**

y comprobar el resultado multiplicándolo por la matriz dada.

Partimos del siguiente esquema: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Primera transformación: $F_2 - 4F_3$, $F_1 - 4F_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Segunda transformación: $F_1 - 2F_2$, $\frac{1}{2} \cdot F_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Luego la matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Es fácil comprobar que $A \cdot A^{-1} = I_3$.

1.14. **Hallar la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**

Partimos del siguiente esquema: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Primera transformación: $F_2 - F_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Segunda transformación: $F_3 + F_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Tercera transformación: $F_2 - F_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Cuarta transformación: $F_1 + F_2$, $(-1) F_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Luego la matriz inversa es: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.15. **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:**

a) Calcular $(A - I)^2 \cdot (A - 5I)$, siendo I la matriz unidad de orden 3.

b) Obtener A^t (matriz traspuesta de A) y razonar si existe la inversa de A.

a) Sustituyendo: $(A - I)^2 = \left[\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Sustituyendo: $A - 5I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Operando: $(A - I)^2 \cdot (A - 5I) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Matriz traspuesta de A es: $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de A (por reducción o directamente) es: $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

1.16. **a) Calcular una matriz X que verifique la igualdad $A \cdot X = B$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$**

b) ¿Verifica también la matriz X la igualdad $X \cdot A = B$?

a) Si existe matriz inversa, se tiene: $AX = B$ es equivalente a $X = A^{-1} \cdot B$.

Matriz inversa utilizando la definición: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz X: $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

b) Si existe matriz inversa, se tiene: $X \cdot A = B$ es equivalente $X = B \cdot A^{-1}$.

El valor de la matriz X para este segundo caso es:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Puesto que las dos soluciones matrices X no son iguales, la primera no verifica la ecuación segunda.

1.17. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, calcular $\dfrac{(A + B)}{2}$, $(A - B)^2$, A^{-1} y B^{-1}.

$$\frac{A + B}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

La matriz inversa de B: $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Las matrices A y B son inversas.

1.18. Encontrar una matriz X tal que $AX + B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Si existe matriz inversa, se tiene: $AX = C - B$ es equivalente a $X = A' (C - B)$.

Matriz inversa utilizando la definición: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz X: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right]$

Operando: $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.19. Obtener los valores de x, y, z que verifiquen la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando, se obtiene el sistema: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$

Resolviendo: $x = 2$, $y = -3$, $z = 2$.

1.20. Encontrar una matriz X que verifique $X - B^2 = AB$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$X - B^2 = AB$ es equivalente a $X = AB + B^2 = (A + B)\,B$: $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$

1.21. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, hallar su inversa y calcular $A^2 - 2A$.

La matriz inversa de A es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{pmatrix}$

Sustituyendo: $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Operando: $A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

1.22. Hallar c, real, si las matrices $A - I$ y $\dfrac{1}{c} \cdot (A - c\,I)$ son inversas, siendo I la matriz unidad 4×4, y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{c}(A - c\,I) = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 1-c & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-c \end{pmatrix}$$

Multiplicando, se tiene: $(A - I) \cdot \dfrac{1}{c}(A - c\,I) = \dfrac{1}{c}\begin{pmatrix} 3 & 3-c & 3-c & 3-c \\ 3-c & 3 & 3-c & 3-c \\ 3-c & 3-c & 3 & 3-c \\ 3-c & 3-c & 3-c & 3 \end{pmatrix}$

Si se toma $c = 3$, se obtiene la matriz unidad.

1.23. Tenemos la matriz siguiente: $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

a) Calcular A^2, A^3 y A^4.

b) Encontrar la ley general para A^n.

a) La matriz A se puede expresar así: $A = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto: $A^2 = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a^2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$A^3 = a^2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a^3\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = a^3\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \cdot a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a^4\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

b) En general, se tiene: $A^n = a^{n-1}\begin{pmatrix} 2^{n-2} & 2^{n-2} \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} \end{pmatrix} \cdot a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = a^n\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

1.24. **Siendo A y B las matrices** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, **averiguar si son ciertas las siguientes igualdades:**

a) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

b) $(A \cdot B)^t = B^t A^t$.

a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

La matriz traspuesta es: $(A + B)^t = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

$A^t + B^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

Por tanto, $(A + B)^t = A^t + B^t$.

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -11 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

La matriz traspuesta es: $(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} -15 & -5 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}$

$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & -5 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, $(A \cdot B)^t = B^t A^t$.

1.25. **Resolver la ecuación $AX = I$ donde** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Se trata de hallar la matriz inversa de A.

Matriz inversa: $A^{-1} = \dfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

1.26. **a) Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, **comprobar que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz unidad.**

b) Usando la fórmula anterior, calcular A^4.

a) Cálculo de A^2: $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Calculo de $2A - I$: $2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

Por tanto, son iguales.

b) $A^4 = (2A - I)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4\,(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$

$4A - 3I = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$

1.27. **Sea la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. **Hallar una matriz B tal que $A \cdot B = A + I$.**

Si existe matriz inversa de A, se tiene: $A \cdot B = A + I$ es equivalente a $B = A^{-1}\,(A + I)$.

Matriz inversa utilizando la definición es: $A^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz B: $B = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

1.28. **Hallar A^{-1} y A^n siendo** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) La matriz inversa (por definición o por Gauss) es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Y en general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.29. **Calcular A^{100} siendo** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Y en general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, $A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 100 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.30. **Hallar una de las matrices X cuadradas de orden 2 y simétricas tales que $AX = 0$ siendo** $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(Una matriz A se llama simétrica si coincide con su traspuesta: $A = A^t$.)

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a - 3c & 3c - 3b \\ 2a - 2c & 2c - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $3a - 3c = 0$, de donde $a = c$.
$3c - 3b = 0$, de donde $c = b$.

Luego $a = b = c$.

La respuesta es cualquier matriz de la forma: $X = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

1.31. **Determinar una matriz cuadrada A de orden 2, simétrica, tal que** $A \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, **cuyos elementos son números naturales y tal que su inversa coincida con su traspuesta.**

Se pide encontrar una matriz que cumpla las siguientes condiciones:

a) Que sea cuadrada de orden 2.

b) Que sea simétrica.

c) Que sus elementos sean números naturales.

d) Que su inversa coincida con su traspuesta.

e) Que no sea la matriz unidad.

Por ser A simétrica, se tiene: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, con lo que $A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = A$.

Matriz inversa: $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - b^2} \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Para que se cumpla $A^{-1} = A^t = A$, es decir, $A^2 = I$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ab + bd \\ ab + bd & b^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando, se obtiene el sistema: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab + bd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$

Utilizando la primera ecuación: $a = 0$, ya que no puede ser 1 al no ser A la matriz unidad.
$b = 1$, por ser $a = 0$.

Utilizando la segunda ecuación o la tercera: $d = 0$.

Por tanto, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.32. **a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, hallar todas las matrices B que cumplen la condición AB = BA.**

b) Calcular también la inversa de A a partir de B.

a) Cálculo de B: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix}$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & a + 2b \\ c + d & c + 2d \end{pmatrix}$$

Igualando, se obtiene el sistema: $\begin{cases} a + c = a + b \\ b + d = a + 2b \\ a + 2c = c + d \\ b + 2d = c + 2d \end{cases}$

De la primera (y cuarta) ecuación: $c = b$.

De la segunda (y tercera) ecuación: $d = a + b$.

Por tanto, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a + b \end{pmatrix}$

b) Cálculo de la matriz inversa de A a partir de B:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b & a + 2b \\ a + 2b & 2a + 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando, se obtiene el sistema: $\begin{cases} a + b = 1 \\ a + 2b = 0 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases}$

La tercera ecuación es la suma de las dos primeras.

Resolviendo el sistema, se tiene: $a = 2$, $b = -1$.

La matriz inversa es: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

1.33. **Calcular el valor de A^{35} siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**

Las primeras potencias son: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y en general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & na & na \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tomando $a = \dfrac{1}{7}$ y $n = 35$, se tiene: $A^{35} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.34. **Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, determinar otra matriz B tal que A + B = AB.**

Si existe matriz inversa, se tiene: $A + B = AB$ es equivalente a $A = AB - B = (A - I)\,B$ de donde: $B = (A - I)^{-1} A$.

Matriz inversa de $A - I$, utilizando la definición es: $(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz B: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1.35. **Determinar los valores de a y b de forma que la matriz A verifique $A^2 = A$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$**

Multiplicando: $A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - a & -2 - b \\ 2a + ab & -a + b^2 \end{pmatrix}$

Igualando $A \cdot A = A$ se tiene el sistema: $4 - a = 2$, de donde $a = 2$.
$-2 - b = -1$, de donde $b = -1$.

Para estos valores se verifican las relaciones: $2a + ab = a$.
$-a + b^2 = b$.

1.36. **a) Encontrar números a y b de forma que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ verifique $A^2 = 2A$.**

b) Para estos valores de a y b, tomando $B = \dfrac{1}{2} A$, calcular B^{36}, A^{36}.

a) Multiplicando: $A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a & 1 + b \\ a + ab & a + b^2 \end{pmatrix}$

Igualando $A \cdot A = 2A$ se tiene el sistema: $1 + a = 2$, de donde $a = 1$.
$1 + b = 2$, de donde $b = 1$.

Para estos valores se verifican las relaciones: $a + ab = 2a$.
$a + b^2 = 2b$.

b) La matriz B es: $B = \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Por tanto: $B^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$

En general, se tiene $B^n = B$. Por tanto, $B^{50} = B$.

De $A = 2B$ se tiene: $A^{50} = 2^{50} B^{50} = 2^{50} B = 2^{49} A$.

1.37. **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Obtener $C + AB$.

b) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (AB)^{-1}$ **y** $(C + AB)^{-1}$**?**

a) Producto AB: $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, $C + AB = I$.

b) Como $C + AB = I$ es la matriz unidad, su inversa es ella misma.

Inversa de C: $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de AB: $(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Por tanto, $C^{-1} + (AB)^{-1} = I = (C + AB)^{-1}$.

1.38. **Determinar dos matrices X e Y tales que** $\begin{matrix} 3X - 5Y = A \\ 4X - 3Y = B \end{matrix}$ **siendo** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

¿Es inversible la matriz $X + Y$**?**

Calcular una matriz C tal que $(X - Y)\, C = I_2$.

Resolviendo el sistema, se tiene: $X = \frac{1}{11}(5B - 3A)$, $Y = \frac{1}{11}(3B - 4A)$

Valor de X: $X = \frac{1}{11}(5B - 3A) = \frac{1}{11}\left[\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 24 & -3 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 7 & 26 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$

Valor de Y: $Y = \frac{1}{11}(3B - 4A) = \frac{1}{11}\left[\begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 32 & -4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 20 \\ -23 & 4 \end{pmatrix}$

La matriz $X + Y$ es inversible: $X + Y = \frac{1}{11}\left[\begin{pmatrix} 7 & 26 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 20 \\ -23 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 46 \\ -32 & 7 \end{pmatrix}$

$$(X + Y)^{-1} = \frac{11}{1\,535}\begin{pmatrix} 7 & -46 \\ 32 & 9 \end{pmatrix}$$

$C = (X - Y)^{-1}$: $X - Y = \frac{1}{11}\left[\begin{pmatrix} 7 & 26 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 20 \\ -23 & 4 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 14 & -1 \end{pmatrix}$

$$(X - Y)^{-1} = \frac{11}{89}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 14 & -5 \end{pmatrix}$$

1.39. **Resolver la ecuación matricial** $AX + B = 2C$ **siendo** $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si existe matriz inversa, se tiene: $AX + B = 2C$ es equivalente a $AX = 2C - B$, de donde $X = A^{-1}(2C - B)$.

Matriz inversa de A^{-1}, utilizando la definición, es: $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Valor de la matriz X: $X = A^{-1}(2C - B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.40. **Un constructor hace una urbanización con tres tipos de viviendas: S (sencillas), N (normales) y L (lujo). Cada vivienda de tipo S tiene 1 ventana grande, 7 medianas y 1 pequeña. Cada vivienda de tipo N tiene 2 ventanas grandes, 9 medianas y 2 pequeñas. Y cada vivienda de tipo L tiene 4 ventanas grandes, 10 medianas y 3 pequeñas.**

Cada ventana grande tiene 4 cristales y 8 bisagras; cada ventana mediana tiene 2 cristales y 4 bisagras, y cada ventana pequeña tiene 1 cristal y 2 bisagras.

a) Escribir una matriz que describa el número y tamaño de las ventanas en cada tipo de vivienda y otra matriz que exprese el número de cristales y el número de bisagras en cada tipo de ventana.

b) Calcular una matriz que exprese el número de cristales y de bisagras necesario en cada tipo de vivienda.

a) Información en forma matricial:

Matriz de las viviendas:

— Filas: Tipo de viviendas: S, N, L.

— Columnas: Tipo de ventanas: G, M, P.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz de los elementos de las ventanas:

— Filas: Tipo de ventanas: G, M, P.

— Columnas: Tipo de cristales y bisagras: C, B.

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Matriz que expresa el número de cristales y bisagras para cada tipo de vivienda:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 4 & 10 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 38 \\ 28 & 56 \\ 39 & 78 \end{pmatrix}$$

1.41. **Una fábrica produce dos modelos de lavadoras, A y B, en tres terminaciones: N, L y S. Produce del modelo A: 400 unidades en la terminación N, 200 unidades en la terminación L y 50 unidades en la terminación S. Produce del modelo B: 300 unidades en la terminación N, 100 unidades en la terminación L y 30 unidades en la terminación S. La terminación N lleva 25 horas de taller y 1 hora de administración. La terminación L lleva 30 horas de taller y 1,2 horas de administración. La terminación S lleva 33 horas de taller y 1,3 horas de administración.**

a) Representar la información en dos matrices.

b) Hallar una matriz que exprese las horas de taller y de administración empleadas para cada uno de los modelos.

a) Información en forma matricial:

Matriz de producción:

— Filas: Modelos: A, B.

— Columnas: Terminaciones: N, L, S.

$$M = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix}$$

Matriz de coste en horas:

— Filas: Terminaciones: N, L, S.

— Columnas: Coste en horas: T, A.

$$N = \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix}$$

b) Matriz que expresa las horas de taller y de administración para cada uno de los modelos:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 400 & 200 & 50 \\ 300 & 100 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 1 \\ 30 & 1{,}2 \\ 33 & 1{,}3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17\,650 & 705 \\ 11\,490 & 459 \end{pmatrix}$$

1.42. **Se dan las transformaciones geométricas planas**

$T(x, y) = (x - y,\ x + y)$,

$S(x, y) = (2x - y,\ x + y)$.

Escribir las matrices asociadas a S y a T. Escribir la matriz asociada a la transformación compuesta: $S \cdot T$.

Si (x', y') son las coordenadas de la imagen, la transformación geométrica T(x, y) = (x − y, x + y) se puede escribir como un sistema de la forma:

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

En forma matricial: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Si (x'', y'') son las coordenadas de imagen de (x', y'), la transformación geométrica S(x', y') = (2x' − y', x' + y') se puede escribir como un sistema de la forma:

$$\begin{cases} x'' = 2x' - y' \\ y'' = x' + y' \end{cases}$$

En forma matricial: $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Las coordenadas (x'', y'') del producto de transformaciones S · T se tiene en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Operando: $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1.43. **Un comerciante de televisores en color tiene 5 aparatos de 26 pulgadas, 8 de 20, 4 de 18 y 10 de 12. Los precios de cada uno de ellos son: 650, 550, 500 y 300 €, respectivamente. Expresar el precio total de venta de sus existencias como producto de dos matrices. Calcular este precio.**

— Información en forma matricial:

Matriz de existencias: Columnas: Modelos 26, 20, 18, 12 $\quad M = (5 \;\; 8 \;\; 4 \;\; 10)$

Matriz de costes: Filas: Precios. $\quad N = \begin{pmatrix} 650 \\ 550 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix}$

— Matriz que expresa el precio de las existencias: $M \cdot N = (5 \;\; 8 \;\; 4 \;\; 10) \cdot \begin{pmatrix} 650 \\ 550 \\ 500 \\ 300 \end{pmatrix} = (12\,650)$

1.44. **Entre cinco personas hay la siguiente relación de influencias: A influye sobre B; E sobre D; C, D y E influyen sobre A. Se pide:**

a) Construir la matriz de influencias: M.

b) Hallar la matriz de influencias de dos etapas: M².

c) Hallar el poder de cada persona.

d) Interpretar la suma de las filas de M y la de sus columnas.

a) La matriz de influencias viene dada por la siguiente tabla:

→	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	0
B	0	0	0	0	0
C	1	0	0	0	0
D	1	0	0	0	0
E	1	0	0	1	0

En forma matricial: $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Matriz de influencias de dos etapas: $M^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) La persona más influyente es E. La persona más influida es A.

d) A, C y D influyen sobre otra persona. E influye sobre dos personas.

A está influida por tres personas. B y D están influidas por una persona.

1.45. **Un contratista puede adquirir las cantidades requeridas de madera, ladrillo, hierro, vidrio y pintura de tres proveedores. Los precios de cada proveedor para los materiales vienen dados por la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

donde cada fila se refiere a un proveedor y la columna a los materiales, en el orden dado anteriormente. El contratista quiere adquirir todos los materiales de una obra al mismo proveedor. Actualmente tiene tres obras en construcción: la obra I requiere 20 unidades de madera, 4 de ladrillos, 5 de hierro, 3 de vidrio y 3 de pintura. La obra II necesita 15, 0, 8, 8 y 2, y la obra III necesita 30, 10, 20, 10 y 12 unidades, respectivamente. Resumir esta información en una matriz B de orden 5 × 3 y formar la matriz de precios AB. Interpretar los elementos de este producto y usarlo para decir qué proveedor debe abastecer cada obra.

a) Información en forma matricial:

Matriz de precios:

— Filas: Proveedores A, B, C.

— Columnas: Precio de los materiales M, L, H, V, P.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz de las cantidades requeridas por las obras:

— Filas: Cantidad requerida de M, L, H, V, P por obra.

— Columnas: Cantidad requerida por las obras I, II, III de cada material.

$$B = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 30 \\ 4 & 0 & 10 \\ 5 & 8 & 20 \\ 3 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Matriz producto AB:

— Filas: Precio de los proveedores A, B, C para cada obra I, II, III.

— Columnas: Coste de las obras I, II, III según los proveedores A, B, C.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 5 & 2 & 5 \\ 9 & 5 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 15 & 30 \\ 4 & 0 & 10 \\ 5 & 8 & 20 \\ 3 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 233 & 200 & 498 \\ 242 & 201 & 490 \\ 248 & 201 & 510 \end{pmatrix}$$

Coste mínimo de la obra I: Proveedor A.

Coste mínimo de la obra II: Proveedor A.

Coste mínimo de la obra III: Proveedor B.

1.46. **En un instituto hay alumnos de tres pueblos, A, B y C, distribuidos por cursos según la matriz M. Una empresa de transportes elabora dos rutas a y b. Los kilómetros que recorrería cada alumno se muestran en la matriz N. Si el precio por alumno y km es de 0,12 €, expresar en forma de matriz lo que se recaudaría por curso por cada itinerario:**

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P & S & T & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 212 & 190 & 125 & 96 \\ 96 & 75 & 50 & 12 \\ 24 & 26 & 12 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \qquad N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 24 & 46 \\ 9 & 32 & 20 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array}$$

Información en forma matricial:

Matriz de alumnos:

— Filas: Número de alumnos de los cursos P, S, T, E.

— Columnas: Número de alumnos de los pueblos A, B, C.

$$M^t = \begin{pmatrix} 212 & 96 & 24 \\ 190 & 75 & 26 \\ 125 & 50 & 12 \\ 98 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

Matriz de kilómetros recorridos:

— Filas: Kilómetros desde cada pueblo A, B, C según la ruta a, b.

— Columnas: Kilómetros por cada ruta a, b.

$$N^t = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 24 & 32 \\ 46 & 20 \end{pmatrix}$$

Matriz producto $M^t \cdot N^t$:

— Filas: Kilómetros por cursos: P, S, T, E.

— Columnas: Kilómetros por ruta: a, b.

$$M^t \cdot N^t = \begin{pmatrix} 212 & 96 & 24 \\ 190 & 75 & 26 \\ 125 & 50 & 12 \\ 98 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 24 & 32 \\ 46 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,104 & 5\,460 \\ 4\,516 & 4\,630 \\ 2\,752 & 2\,965 \\ 1\,440 & 1\,426 \end{pmatrix}$$

Precio por curso de cada itinerario:

— Filas: Precio por ruta de los cursos.

— Columnas: Precio por curso según itinerario.

$$M^t \cdot N^t = 0{,}12 \cdot \begin{pmatrix} 212 & 96 & 24 \\ 190 & 75 & 26 \\ 125 & 50 & 12 \\ 98 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 24 & 32 \\ 46 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 612{,}48 & 655{,}20 \\ 541{,}92 & 555{,}60 \\ 330{,}24 & 355{,}80 \\ 172{,}80 & 171{,}12 \end{pmatrix}$$

1.47. Una fábrica de muebles fabrica tres modelos de estanterías A, B y C, cada uno de dos tamaños, grande y pequeño. Produce diariamente 1 000 estanterías grandes y 8 000 pequeñas de tipo A, 8 000 grandes y 6 000 pequeñas de tipo B, y 4 000 grandes y 6 000 pequeñas de tipo C. Cada estantería grande lleva 16 tornillos y 6 soportes, y cada estantería pequeña lleva 12 tornillos y 4 soportes, en cualquiera de los tres modelos.

a) Representar esta información en dos matrices.

b) Hallar una matriz que represente la cantidad de tornillos y de soportes necesarios para la producción diaria de cada uno de los seis modelos-tamaño de estantería.

a) Información en forma matricial:

Matriz de producción:

— Filas: Modelos de estanterías: A, B, C.

— Columnas: Tipo de estantería: G, P.

$$M = \begin{pmatrix} 1\,000 & 8\,000 \\ 8\,000 & 6\,000 \\ 4\,000 & 6\,000 \end{pmatrix}$$

Matriz de los elementos de las estanterías:

— Filas: Tipo de estanterías: G, P.

— Columnas: Tipo de tornillos y soportes: T, S.

$$N = \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$$

b) Matriz que expresa el número de tornillos y soportes para cada modelo de estantería:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1\,000 & 8\,000 \\ 8\,000 & 6\,000 \\ 4\,000 & 6\,000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 112\,000 & 38\,000 \\ 200\,000 & 72\,000 \\ 136\,000 & 48\,000 \end{pmatrix}$$

CUESTIONES

1.48. a) ¿Qué características deberían tener las matrices A y B para que se puedan efectuar los productos AB y BA?

b) Dadas las matrices A y B, sabemos que existe el producto AB. ¿Qué puede decirse del producto BA?

Las matrices pueden multiplicarse si se cumple la siguiente condición:

El número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz.

a) Las matrices rectangulares pueden multiplicarse si se cumple la condición anterior.

Por ejemplo, si A es una matriz de orden 3×4 y B de orden 4×3, existen el producto AB y el producto BA, pero son distintos porque AB es de orden 3×3 y BA de 4×4.

Por tanto, existen en general los productos AB y BA si el orden de A es $m \times n$ y el de B $n \times m$.

b) Pueden presentarse dos casos:

Que no exista el producto BA porque las matrices no se puedan multiplicar. Por ejemplo, si A es una matriz de orden 3×4 y B de orden 4×2, existe el producto AB pero no el producto BA, ya que no se pueden multiplicar.

Aun existiendo AB y BA, pueden ser distintos los productos. Por ejemplo, si A es una matriz de orden 3×4 y B de orden 4×3, existe el producto AB y el producto BA, pero son distintos porque AB es de orden 3×3 y BA de 4×4.

1.49. Sean A y B dos matrices cuadradas cualesquiera de segundo orden.

a) ¿Es cierta la igualdad $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$?

b) ¿Y la igualdad $(A + B)^t = A^t + B^t$?

a) $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$.

Como, en general, $AB \neq BA$, no es cierta la igualdad del enunciado.

b) Este resultado es cierto.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix} a+m & b+n \\ c+p & d+q \end{pmatrix}$$

$$A^t + B^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & p \\ n & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+m & c+p \\ b+n & d+q \end{pmatrix} = (A + B)^t$$

1.50. ¿Se pueden sumar siempre dos matrices? ¿Se pueden multiplicar siempre dos matrices traspuestas? Poner ejemplos.

— No siempre es posible.

Dos matrices pueden sumarse si tienen la misma dimensión.

Por ejemplo, una matriz cuadrada de orden 4 y otra rectangular de orden 2×4 no pueden sumarse.

— No siempre es posible.

Dos matrices rectangulares, y por tanto sus traspuestas, no pueden multiplicarse en general.

Por ejemplo, si A es una matriz de orden 2×4 y B de orden 5×3, no existe el producto AB. Las traspuestas son de orden 4×2 y 3×5 y su producto tampoco existe.

1.51. Dada una matriz A de orden 3×4, ¿qué matriz X sumada con ella da la misma matriz A, es decir, A + X = A? Poner un ejemplo.

La matriz X es la matriz de orden 3×4 cuyos elementos son todos nulos.

La matriz X se llama entonces matriz nula y se designa por 0.

Un ejemplo es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Para números cualesquiera, * en la matriz, se tiene también:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

1.52. **Dada una matriz A, ¿existe una matriz B tal que el producto AB o bien el BA sea una matriz de una sola fila?**

La respuesta es sí.

Supongamos que se tiene la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Si se toma $B = (1\ 2\ 3)$, existe el producto BA que es una matriz fila: $(1\ 2\ 3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} = (10\ 7\ 3\ 20)$

Nótese que B es de orden 1×3, A de orden 3×4 y AB de orden 1×4.

1.53. **La matriz A es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. ¿Existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de tres filas?**

La respuesta es negativa.

En efecto, siendo A de orden 2×4, la matriz B debe ser de orden $4 \times m$, para que puedan multiplicarse; el producto AB sería de orden $2 \times m$, que tendría 2 filas y m columnas.

1.54. **La matriz A es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. ¿Existe una matriz X tal que el producto AX sea la matriz A? Razonar la respuesta.**

La respuesta es afirmativa.

Si elegimos como X la matriz unidad de orden 4, entonces $AX = A$. En efecto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Nótese que la dimensión A es 2×4 y la de la matriz unidad 4×4, de este modo pueden multiplicarse.

1.55. **Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n. Si AB = AC, ¿se puede concluir que B = C? Si no es así, comprobarlo con un ejemplo sencillo.**

En general, no puede afirmarse.

Por ejemplo, si A es la matriz nula de orden n, para cualquier par de matrices cuadradas B y C de orden n se tiene que $AB = AC$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora que, para que pueda aplicarse la propiedad simplificativa, la matriz A debe ser inversible:

Si A es una matriz inversible:

De $AB = AC$.

Multiplica por la izquierda: $A^{-1} \cdot AB = A^{-1} \cdot AC$.

Operando: $I \cdot B = I \cdot C$.

Operando: $B = C$.

1.56. **Un alumno suma y resta filas para simplificar los números que aparecen en una matriz. ¿Puede hacerlo sin alterar el rango de la misma?**

Puede hacerlo, siempre que a una fila le sume o reste otra fila paralela, no ella misma. Esta es una de las propiedades de la equivalencia de matrices o conjunto de vectores.

Haremos la demostración para una matriz de 3 filas independientes.

Para más filas la demostración es similar.

Se trata de ver que, si el conjunto $\{F_1, F_2, F_3\}$ es linealmente independiente, también lo es el conjunto $\{F_1 + F_2, F_2, F_3\}$. En este caso, a la primera fila se le ha sumado la segunda.

Aplicando la condición de independencia de vectores, se sigue: $a(F_1 + F_2) + b\,F_2 + c\,F_3 = 0$.

Operando: $a\,F_1 + (a + b)\,F_2 + c\,F_3 = 0$.

Por tanto, si los vectores filas F_1, F_2, F_3 son linealmente independientes, se tiene que:

$$a = 0, \quad a + b = 0, \quad c = 0$$

de donde, $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

Luego el conjunto $\{F_1 + F_2, F_2, F_3\}$ es también linealmente independiente y tiene el mismo rango.

1.57. **El rango de una matriz se define a partir del número de filas o columnas independientes. ¿Da el mismo resultado?**

El resultado es el mismo.

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 filas, ya que no son proporcionales.

Por otra parte, las dos primeras columnas son independientes (ya que no son proporcionales), además:

$$C_3 = 2 \cdot C_2 - C_1$$
$$C_4 = 3 \cdot C_2 - 2 \cdot C_1$$
$$C_5 = 4 \cdot C_2 - 3 \cdot C_1$$

Luego, el rango por columnas es también 2.