José Jaime Mas Bonmatí E-Mail: josejaime@ieslaasuncion.org
I.E.S. La Asunción Departamento de Matemáticas
http://www.ieslaasuncion.org

4. ▶ PROGRAMACIÓN LINEAL

EJERCICIOS

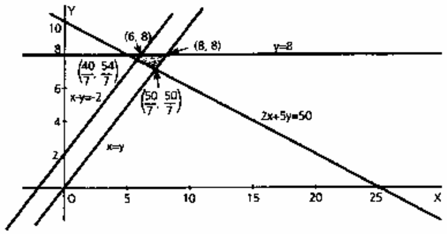
4.1. **Representar el conjunto de puntos que satisfacen simultáneamente las siguientes inecuaciones:**

$$x \leqslant 2, \quad x \geqslant -2, \quad y \leqslant 1$$

Como una inecuación lineal representa un semiplano, representaremos las ecuaciones $x = 2$; $x = -2$; $y = 1$ y después determinamos a partir de un punto cualquiera si cumple o no la inecuación, en cuyo caso pertenecerá o no, respectivamente, al semiplano correspondiente.

4.2. **Representar gráficamente el conjunto de puntos que verifican las siguientes inecuaciones:**

$$\begin{cases} y \geqslant x \\ y \leqslant 8 \\ x - y \geqslant -2 \\ 2x + 5y \geqslant 50 \end{cases}$$



4.3. **Determinar el máximo valor de la función $F(x, y) = y + x$ en el recinto:**

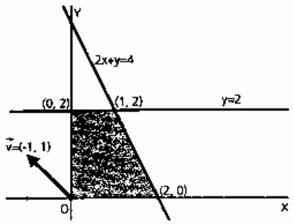
$$x \geqslant 0; \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2; \qquad 2x + y \leqslant 4$$

Representamos el recinto dado por las inecuaciones:

Representamos el vector director de la función a maximizar: $F(x, y) = y + x \implies \vec{v} = (-1, 1)$.

Por paralelismo, se observa fácilmente que el máximo se obtiene en el punto (1, 2).

Por tanto, la función $F(x, y)$ vale en el máximo: $F(x, y) = y + x = 2 + 1 = 3$.



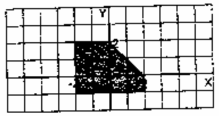
4.4. Considerar el recinto de la figura en el que están incluidos todos los lados y todos los vértices.

a) Escribir las inecuaciones que lo definen.

b) Maximizar la función $z = x + y$.

a) Las rectas que determinan los bordes del recinto son: $x = -2$; $x = 2$; $y = -1$; $y = 2$; $y = -x + 2$.

El recinto queda determinado mediante las siguientes inecuaciones:



$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 2 \\ y \geq -1 \\ y \leq 2 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$$

b) El vector director de la función $z = x + y$ es $(-1, 1)$ y es paralelo a la recta $x + y = 2$. Por tanto, el máximo de esta función en este recinto no es único, sino que se obtiene en cualquier punto del borde $x + y = 2$.

En consecuencia, el valor máximo de la función es 2.

4.5. Dada la región del plano definida por las siguientes inecuaciones: $\begin{cases} x + y - 1 \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$

¿Para qué valores (x, y) de la región es máxima la función $z = 5x + 2y$?

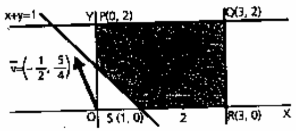
¿Para cuáles es mínima?

Representamos la región determinada por las inecuaciones dadas.

Representamos el vector director de la función objetivo.

$z = 5x + 2y \Rightarrow \vec{v}\,(-2, 5)$ o proporcionales.

Por paralelismo con el vector director se observa que el máximo se obtiene en el punto Q(3, 2) y el mínimo en el punto T(0, 1).

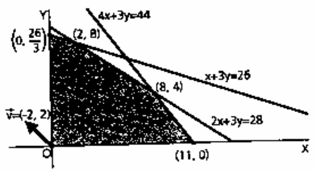


4.6. Maximizar $z = x + y$ sujeta a $x + 3y \leq 26$, $4x + 3y \leq 44$, $2x + 3y \leq 28$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Representamos el recinto dado por las inecuaciones y calculamos los vértices del recinto.

El vector director de la función objetivo $z = x + y$ es $\vec{v} = (-1, 1)$ y geométricamente se ve fácilmente que la función objetivo alcanza el máximo en el punto (8, 4).

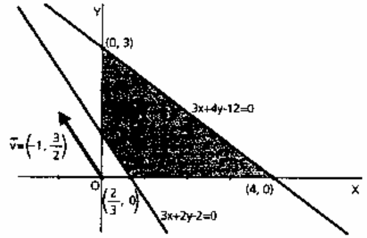
Por tanto, el valor máximo de la función objetivo es: $z = 8 + 4 = 12$.



4.7. Considerar la función $z = \frac{3}{2}x + y$ en el conjunto $\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 3x + 2y - 2 \geq 0 \\ 3x + 4y - 12 \leq 0 \end{cases}$

Comprobar que esta función alcanza su valor mínimo en más de un punto.

Representamos el recinto dado por las inecuaciones:



El vector director de la función objetivo $z = \frac{3}{2}x + y$ es $\vec{v} = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$.

Como el vector $\vec{v}$ es paralelo al borde determinado por la recta $3x + 2y - 2 = 0$, entonces el mínimo no es único, ya que cualquier punto de dicho borde hace mínima la función objetivo: $z = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} + 0 = 1$.

PROBLEMAS

4.8. Pablo dispone de 120 € para gastar en libros y discos. A la tienda donde acude, el precio de los libros es de 4 € y el de los discos es de 12 €. Suponiendo que desea comprar como mucho doble número de libros que de discos, se pide:

a) Formular el problema y representarlo gráficamente.

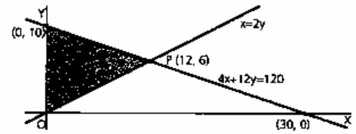
b) Contestar razonadamente si puede comprar 12 libros y 6 discos. En caso afirmativo, indicar si gasta todo su presupuesto.

c) ¿Puede adquirir 15 libros y 5 discos? ¿Cuánto dinero le sobra? Razonar la respuesta.

a) Sea x el número de libros e y el número de discos que Pablo puede adquirir.

Del enunciado se deducen las siguientes inecuaciones: $\begin{cases} 4x + 12y \leq 120 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Representamos el recinto dado por las inecuaciones:



Cualquier punto del recinto rayado es una solución que satisface las inecuaciones.

b) 12 libros y 6 discos corresponden al punto P, que es un vértice del recinto y, en consecuencia, una solución posible. En ese caso el gasto sería: $12 \cdot 4 + 6 \cdot 12 = 120$; es decir, se gastaría todo el presupuesto.

c) Como el punto (15, 5) queda fuera del recinto, no verificaría las condiciones impuestas.

Desde el punto de vista del gasto sería posible, ya que $15 \cdot 4 + 5 \cdot 12 = 120$.

Pero no cumpliría la condición de que el número de libros que compre no deberá superar el doble del número de discos.

4.9. **En una granja de pollos se da una dieta «para engordar» con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad A y cinco de B, y el tipo Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 € y el del tipo Y es de 30 €. Se pregunta:**

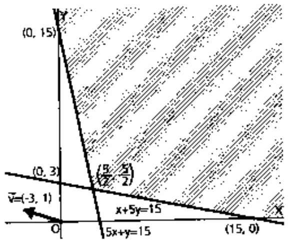
¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

Sean x e y las cantidades que compramos de los compuestos X e Y, respectivamente.

La función objetivo será: $z = 10x + 30y$.

Esta función hay que minimizarla con arreglo a las siguientes restricciones:

$$\left\{\begin{array}{r} x + 5y \geqslant 15 \\ 5x + y \geqslant 15 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right.$$



Representamos el recinto dado por las restricciones:

El vector director de la función objetivo es: $\vec{v} = (-3, 1)$.

Luego el mínimo se obtiene en el punto $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Por tanto, se habrán de comprar 2,5 unidades del compuesto X y 2,5 unidades del compuesto Y.

4.10. **Una compañía fabrica y vende dos modelos de lámparas L_1 y L_2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para el L_2; y un trabajo de máquina de 20 minutos para L_1 y de 10 minutos para L_2.**

Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina de 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 1,50 € y 1 € para L_1 y L_2, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio.

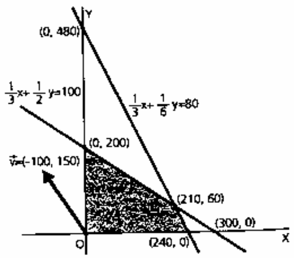
Pasaremos todos los tiempos a horas:

$$20 \text{ minutos} = \frac{1}{3} \text{ h}; \qquad 30 \text{ minutos} = \frac{1}{2} \text{ h}; \qquad 10 \text{ minutos} = \frac{1}{6} \text{ h}$$

Sean x e y las cantidades que se han de fabricar de las lámparas L_1 y L_2, respectivamente.

La función objetivo es: $z = 1{,}50x + 1y$, que hemos de maximizar con arreglo a las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y \leqslant 100 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y \leqslant 80 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$$



Representando el recinto dado por las restricciones:

La función objetivo es: $z = 1{,}50x + 1y$, y su vector director es: $(-1, 1{,}5)$ o proporcionales.

Por traslación paralela al vector $\vec{v}$ obtenemos que la función se hace máxima en el punto (210, 60).

Por tanto, se deberán fabricar 210 lámparas del tipo L_1 y 60 lámparas del tipo L_2.

Beneficio máximo: $z = 375$ euros.

4.11. **Una empresa constructora dispone de dos tipos de camiones A y B y quiere transportar 100 t de material al lugar de una obra. Sabiendo que dispone de 6 camiones del tipo A con una capacidad de 15 t y con un costo de 40 € por viaje y de 10 camiones del tipo B con una capacidad de 5 t y con un costo de 30 € por viaje, se pide:**

a) El número posible de camiones de cada tipo que puede usar (solución gráfica).

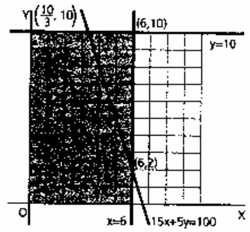
b) El número de camiones de cada tipo que debe usar para que el coste sea mínimo y el valor de dicho coste.

Sean x e y el número de camiones del tipo A y B, respectivamente.

Del enunciado se deduce:

$$\left.\begin{array}{r} x \leqslant 6 \\ y \leqslant 10 \\ 15x + 5y = 100 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$$

a) Representamos el recinto dado por las restricciones:



Como los valores de x e y tienen que ser números naturales, pues no tiene sentido 3,7 camiones, debemos buscar los valores de abscisa y ordenada natural que satisfacen la ecuación $15x + 5y = 100$ dentro de la región rayada.

Las posibles soluciones son:

4 camiones del tipo A y 8 camiones del tipo B.

5 camiones del tipo A y 5 camiones del tipo B.

6 camiones del tipo A y 2 camiones del tipo B.

b) La función de coste es: $z = 40x + 30y$.

Evaluemos dicha función en los puntos enteros:

En (4, 8) $\Rightarrow z = 40 \cdot 4 + 30 \cdot 8 = 400$ euros.

En (5, 5) $\Rightarrow z = 40 \cdot 5 + 30 \cdot 5 = 350$ euros.

En (6, 2) $\Rightarrow z = 40 \cdot 6 + 30 \cdot 2 = 300$ euros.

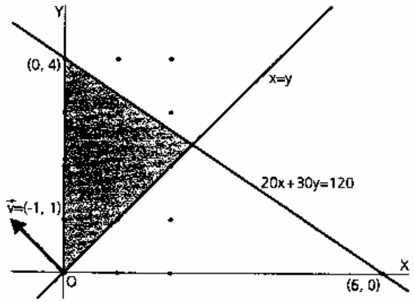
Luego el coste se hace mínimo cuando se utilizan 6 camiones del tipo A y 2 camiones del tipo B. Y el valor de dicho coste es 300 euros.

4.12. **Un quiosco vende bolígrafos a 20 céntimos de euro y cuadernos a 30 céntimos de euro. Llevamos 1,20 € y pretendemos comprar los mismos cuadernos que bolígrafos por lo menos. ¿Cuál será el número máximo de piezas que podemos comprar?**

Sean x e y el número de bolígrafos y cuadernos que vamos a comprar, respectivamente.

De enunciado se deduce:

$$\left.\begin{array}{r} 20x + 30y \leqslant 120 \\ x \leqslant y \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$$



Representamos el recinto dado por las restricciones:

Las soluciones tienen que ser en este caso números naturales.

La función objetivo viene dada por el número de piezas que vamos a comprar, es decir: $z = x + y$.

Y esta es la función que queremos maximizar. El vector director de la función objetivo es: $\vec{v} = (-1, 1)$.

Por paralelismo con el vector $\vec{v}$, vemos que hay tres puntos que cumplen la condición de maximizar la función objetivo.

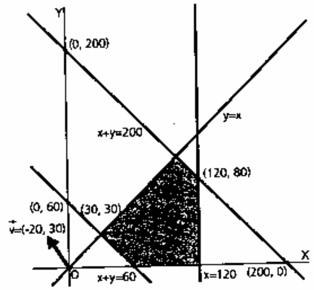
Los puntos son: (2, 2), (1, 3) y (0, 4).

En todos ellos se verifica que el número de piezas compradas es 4.

4.13. Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B, pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer más de 60 vuelos, pero menos de 200. En cada vuelo, A consume 900 litros de combustible y B consume 700 litros. En cada viaje del avión A la empresa gana 3 000 € y 2 000 € por cada viaje del avión B. ¿Cuántos viajes debe hacer cada avión para obtener el máximo de ganancias? ¿Cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo?

Sean x e y el número de viajes que realizan, respectivamente, los aviones A y B.

Del enunciado se deduce:
$$\left.\begin{array}{r} x \geqslant y \\ x \leqslant 120 \\ x + y \geqslant 60 \\ x + y \leqslant 200 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$$



Representamos el recinto dado por estas restricciones:

La función objetivo de la ganancia es: $z = 3\,000x + 2\,000y$.

Y su vector director es $\vec{v} = (-2, 3)$ o proporcionales.

Por tanto, la ganancia máxima se obtiene en el punto (120, 80); es decir, cuando el avión A efectúa 120 viajes y el avión B, 80 viajes.

La ganancia máxima será: $z = 3\,000 \cdot 120 + 2\,000 \cdot 80 = 520\,000$ euros.

La función objetivo de consumo de combustible es: $h = 900x + 700y$, y su vector director es: $\vec{w} = (-7, 9)$.

Por traslación paralela del vector $\vec{w}$ se obtiene el mínimo para el consumo en el punto (30, 30); es decir, cuando cada tipo de avión efectúa 30 viajes.

Por tanto, $900 \cdot 30 + 700 \cdot 30 = 48\,000$ litros.

4.14. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. Las del tipo A precisan 1 g de oro y 1,5 g de plata, vendiéndolas a 40 € cada una. Para la fabricación de las del tipo B emplea 1,5 g de oro y 1 g de plata, y las vende a 50 €. El orfebre tiene solo en el taller 750 g de cada uno de los metales. Calcular cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo.

Sean x e y el número de joyas de tipo A y de tipo B, respectivamente, que se van a fabricar.

Del enunciado se deduce:
$$\left.\begin{array}{r} x + 1{,}5y \leqslant 750 \\ 1{,}5x + y \leqslant 750 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$$

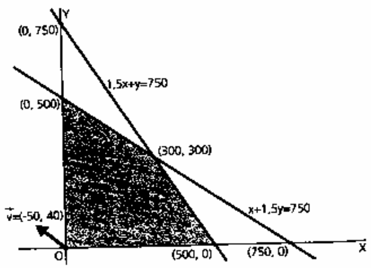
Representamos el recinto dado por estas restricciones:

La función objetivo (beneficio) es: $z = 40x + 50y$.

El vector director de la función objetivo es: $\vec{v} = (-50, 40)$.

Por traslación paralela del vector $\vec{v}$ obtendremos que la función objetivo se hace máxima en el punto (300, 300).

Por tanto, habrá que fabricar 300 joyas del tipo A y 300 joyas del tipo B.



4.15. La tabla siguiente muestra las unidades de nitrógeno (N) y de fósforo (P) que contiene cada kilo de los abonos A y B:

	N	P
A	1	3
B	3	1

Se desea obtener un abono que, como mínimo, contenga 9 unidades de N y 9 unidades de P. El precio de A es de 10 €/kg y el de B es de 20 €/kg. Calcular las cantidades que deben comprarse de A y de B para satisfacer las necesidades minimizando el coste. Resolver el mismo ejercicio suponiendo que el precio de B es de 30 €/kg.

Sean x e y el número de kilos de A y B, respectivamente.

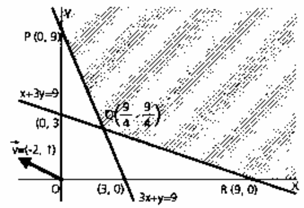
De enunciado se deduce:
$$\left.\begin{array}{r} x + 3y \geqslant 9 \\ 3x + y \geqslant 9 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$$

Representamos el recinto dado por las restricciones:

La función objetivo que queremos minimizar es: $z = 10x + 20y$.

El vector director de dicha recta es: $\vec{v} = (-2, 1)$.

Como gráficamente no se ve muy bien la solución, evaluamos la función objetivo en los vértices del recinto, que hemos calculado previamente:



$z(P) = 10 \cdot 0 + 20 \cdot 9 = 180$ euros.

$z(Q) = 10 \cdot \frac{9}{4} + 20 \cdot \frac{9}{4} = 67{,}50$ euros.

$z(R) = 10 \cdot 9 + 20 \cdot 0 = 90$ euros.

Por tanto, el mínimo se obtiene en el punto $Q\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$. Es decir, se necesitan $\frac{9}{4}$ kilos de A y $\frac{9}{4}$ kilos de B.

En caso de que el precio de B sea de 30 €/kg, la función objetivo que queremos minimizar es: $z = 10x + 30y$.

El vector director de dicha recta es: $\vec{v} = (-3, 1)$.

Como la recta QR es paralela al vector director de la función objetivo, cualquier punto del segmento QR minimiza la función objetivo.

4.16. Una casa fabrica helados A y B, hasta un máximo diario de 1 000 kg. La fabricación de 1 kg de A cuesta 1,80 €, y 1 kg de B cuesta 1,50 €. Calcular cuántos kilogramos de A y de B deben fabricarse, sabiendo que la casa dispone de 2 700 €/día y que un kilogramo de A deja un margen igual al 90 % del que deja uno de B.

Sean x e y el número de kilos fabricados de A y B, respectivamente.

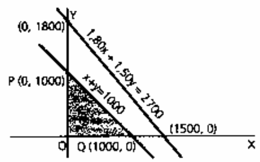
Del enunciado se deduce:
$$\left.\begin{array}{r} x + y \leqslant 1\,000 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 1{,}80x + 1{,}50y \leqslant 2\,700 \end{array}\right\}$$

Representamos el recinto dado por las restricciones:

Hallamos la función objetivo que queremos maximizar:

Sea k el margen que deja un kilogramo de B, entonces el margen que deja un kilogramo de A es: $\frac{90}{100}k = 0{,}9k$ y, en consecuencia, el margen total es: $z = 0{,}9kx + ky$.

Evaluemos dicha función en los puntos P y Q:



$z(P) = 0{,}9k \cdot 0 + k \cdot 1\,000 = 1\,000k$

$z(Q) = 0{,}9k \cdot 1\,000 + k \cdot 0 = 900k$

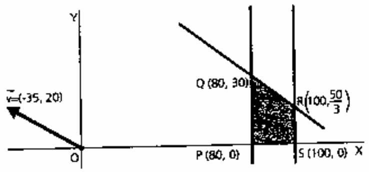
Por tanto, la función objetivo alcanza el máximo en el punto P(0, 1 000); es decir, se deberán fabricar 0 kg de helados del tipo A y 1 000 kg de helados del tipo B.

4.17. En un taller de chapistería se pueden fabricar dos tipos de carrocerías A y B. Cada coche del tipo A necesita 4 horas de pintura, y el del tipo B, 6 horas, disponiéndose de un máximo de 500 horas mensuales para la pintura de las carrocerías. Si los beneficios de cada coche son de 2 000 € y 3 500 € para los tipos A y B, calcular el número de coches de cada tipo que deben producirse para obtener el máximo beneficio si tenemos que fabricar un mínimo de 80 y un máximo de 100 coches del tipo A. ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

Sean x e y el número de coches que se van a fabricar de los tipos A y B, respectivamente.

Del enunciado se deduce: $\left.\begin{array}{r} 4x + 6y \leqslant 500 \\ 80 \leqslant x \leqslant 100 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$

Representamos el recinto dado por las restricciones:



La función objetivo que tratamos de maximizar es: $z = 2\,000x + 3\,500y$.

El vector director de la función objetivo es: $\vec{v} = (-3{,}5;\ 2)$ o proporcionales.

Por traslación paralela se obtiene que la función z se hace máxima en el punto Q(80, 30).

Por tanto, se deberán fabricar 80 coches del tipo A y 30 coches del tipo B.

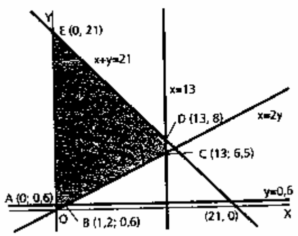
El beneficio máximo es: $2\,000 \cdot 80 + 3\,500 \cdot 30 = 265\,000$ euros.

4.18. Disponemos de 210 000 € para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10 %, y las del tipo B, que rinden el 8 %. Decidimos invertir un máximo de 130 000 € en las del tipo A, y como mínimo 6 000 € en las del tipo B. Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Sean x e y los euros que invertimos en las acciones del tipo A y del tipo B, respectivamente.

Del enunciado se deduce: $\left.\begin{array}{r} x + y \leqslant 210\,000 \\ x \leqslant 130\,000 \\ y \geqslant 6\,000 \\ x \leqslant 2y \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$

Representamos el recinto dado por las restricciones:



La función objetivo que queremos maximizar es:

$z = \frac{10}{100}x + \frac{8}{100}y = 0{,}1x + 0{,}08y$.

Evaluamos la función en los puntos C, D y E.

$z(C) = 0{,}1 \cdot 13 + 0{,}08 \cdot 6{,}5 = 18\,200$ euros.

$z(D) = 0{,}1 \cdot 13 + 0{,}08 \cdot 8 = 19\,400$ euros.

$z(E) = 0{,}1 \cdot 0 + 0{,}08 \cdot 21 = 16\,800$ euros.

La distribución ha de ser: 130 000 euros del tipo A y 80 000 euros del tipo B.

4.19. Con el comienzo del curso se van a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas; en el primer bloque pondrán 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo, 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán 6,50 € y 7 €, respectivamente.

¿Cuántos paquetes les conviene poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

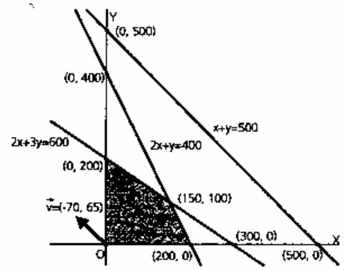
a) Escribir el problema de programación lineal.

b) Resolverlo gráficamente.

Sean x e y el número de paquetes que se van a poner del 1.º y 2.º tipo, respectivamente.

Del enunciado se deduce: $\left.\begin{array}{r} \text{cuadernos: } 2x + 3y \leqslant 600 \\ \text{carpetas: } x + y \leqslant 500 \\ \text{bolígrafos: } 2x + y \leqslant 400 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$

Representamos el recinto dado por las restricciones:



La función objetivo que queremos maximizar es: $z = 6{,}50x + 7y$.

El vector director de la función objetivo es: $\vec{v} = (-7;\ 6{,}5)$ o proporcionales.

Por traslación paralela se obtiene que la función objetivo se hace máxima en el punto (150, 100).

Por tanto, se deberán preparar 150 paquetes del tipo primero y 100 paquetes del tipo segundo.

Sustituyendo estos valores en la función objetivo se obtiene que las ventas son: $6{,}50 \cdot 150 + 7 \cdot 100 = 1\,675$ €.

4.20. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 €, y el de uno pequeño, 60 €.

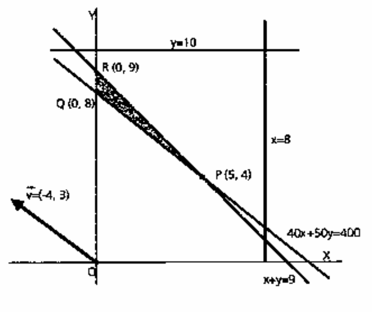
Calcular cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

Identificar, en este planteamiento, las variables, las restricciones y la función a optimizar.

Sean x e y el número de autocares que se han de utilizar de 40 plazas y de 50 plazas, respectivamente.

Del enunciado se deduce: $\left.\begin{array}{r} x + y \leqslant 9 \\ 40x + 50y \geqslant 400 \\ 0 \leqslant x \leqslant 8 \\ 0 \leqslant y \leqslant 10 \end{array}\right\}$

Representamos el recinto dado por las restricciones:



La función objetivo que queremos minimizar es:
$z = 60x + 80y$.

El vector director de la función objetivo es:
$\vec{v} = (-80, 60)$ o bien $(-4, 3)$.

Por traslación paralela se obtiene que la función z se hace mínima en el punto P(5, 4).

Por tanto, se deberán utilizar 5 autocares de 40 plazas y 4 autocares de 50 plazas.

En este caso el coste es: $60 \cdot 5 + 80 \cdot 4 = 620$ €.

José Jaime Mas Bonmatí E-Mail: josejaime@ieslaasuncion.org
I.E.S. La Asunción Departamento de Matemáticas
http://www.ieslaasuncion.org

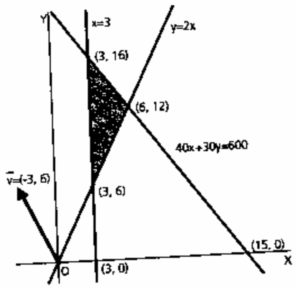
4.21. Se dispone de 600 g de un determinado fármaco para elaborar pastillas grandes y pequeñas. Las grandes pesan 40 g y las pequeñas 30 g. Se necesitan al menos tres pastillas grandes, y al menos el doble de pequeñas que de las grandes.

Cada pastilla grande proporciona un beneficio de 20 céntimos de euro y la pequeña 10 céntimos de euro. ¿Cuántas pastillas se han de elaborar de cada clase para que el beneficio sea máximo?

Sean x el número de pastillas grandes e y el número de pastillas pequeñas que se van a elaborar.

Del enunciado se deduce: $\left.\begin{array}{r} 40x + 30y \leq 600 \\ x \geq 3 \\ y \geq 2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$

Representamos el recinto dado por las restricciones:



La función objetivo que queremos maximizar es: $z = 20x + 10y$.

El vector director de la función objetivo es: $\vec{v} = (-1, 2)$ o proporcionales.

Por traslación paralela se observa que la función z alcanza el máximo en el punto (6, 12).

Por tanto, se deberán fabricar 6 pastillas grandes y 12 pequeñas.

El beneficio será:

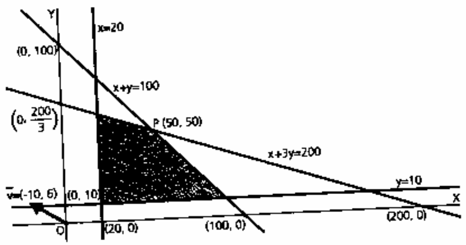
$20 \cdot 6 + 10 \cdot 12 = 240$ céntimos de euro = 2,40 euros.

4.22. Unos grandes almacenes desean liquidar 200 camisas y 100 pantalones de la temporada anterior. Para ello lanzan dos ofertas, A y B. La oferta A consiste en un lote de una camisa y un pantalón, que se vende a 30 €; la oferta B consiste en un lote de tres camisas y un pantalón, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 20 lotes de la oferta A ni menos de 10 de la B. ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar la ganancia?

Sean x e y el número de lotes que se van a vender de los tipos A y B, respectivamente.

Del enunciado se deduce: $\left.\begin{array}{rr} \text{Camisas:} & x + 3y \leq 200 \\ \text{Pantalones:} & x + y \leq 100 \\ & x \geq 20 \\ & y \geq 10 \end{array}\right\}$

Representamos el recinto dado por las restricciones:



La función objetivo que queremos maximizar es: $z = 30x + 50y$.

El vector director de la función objetivo es: $\vec{v} = (-5, 3)$ o proporcionales.

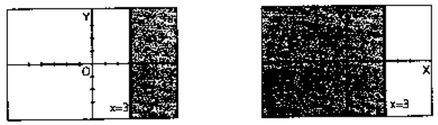
Por traslación paralela se obtiene que la función z alcanza el máximo en el punto P(50, 50).

Por tanto, se deberán vender 50 lotes de cada tipo.

La ganancia en este caso será: $z(P) = 30 \cdot 50 + 50 \cdot 50 = 4\,000$ €.

CUESTIONES

4.23. Representar el semiplano determinado por la inecuación $x \geq 3$, y el determinado por la inecuación $x \leq 3$.



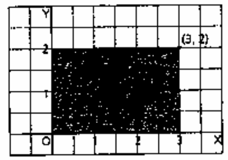
4.24. ¿Pertenece el punto P(1, 1) al semiplano dado por la inecuación $3x - y \geq -2$?

Basta ver si las coordenadas del punto satisfacen la inecuación: $3 \cdot 1 - 1 \geq -2 \Leftrightarrow 2 \geq -2$; luego el punto P(1, 1) sí pertenece al semiplano dado por la inecuación $3x - y \geq -2$.

4.25. Dar las coordenadas de un punto cualquiera que pertenezca al semiplano dado por la inecuación $3x - y \leq -2$.

Basta encontrar un par de valores que satisfagan la inecuación anterior; por ejemplo, Q(2, 9).

4.26. Dada la región sombreada representada en la figura siguiente, expresar las inecuaciones que la definen:



$x \geq 0$; $y \geq 0$; $y \leq 2$; $x \leq 3$

4.27. Explicar brevemente en qué consiste un problema de programación lineal. Utilizar un ejemplo inventado con dos variables, para apoyar las explicaciones.

La programación lineal permite resolver problemas, en infinidad de aplicaciones de la industria, la economía, la estrategia militar, etc., que presentan situaciones en las que se exige maximizar o minimizar una función que se encuentra sujeta a determinadas limitaciones, que llamamos restricciones.

La función a maximizar o minimizar se llama función objetivo.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Una fábrica de automóviles y camiones tiene dos talleres. En el taller A, para hacer un camión deben trabajar 7 días/operario; en cambio, para fabricar un automóvil se precisa 2 días/operario. En el taller B invierten 3 días/operario tanto en la terminación de un camión como en la de un automóvil. Debido a las limitaciones de hombres y maquinaria, el taller A dispone de 300 días/operario, mientras que el taller B dispone de 270 días/operario. Si el fabricante obtiene una ganancia de 36 000 euros en cada camión y 12 000 euros en cada automóvil, ¿cuántas unidades de cada uno deberá producir para maximizar su ganancia?

4.28. ¿Cómo se llama la función que se trata de maximizar o minimizar?

La función a maximizar o minimizar se llama función objetivo.

4.29. ¿Qué se entiende por restricción en un problema de programación lineal? Poner un ejemplo.

Se trata de una inecuación lineal entre algunas variables que intervienen en el problema.

Por ejemplo: $x + 2y \leq 100$.

.30. ¿Qué se entiende por solución factible?

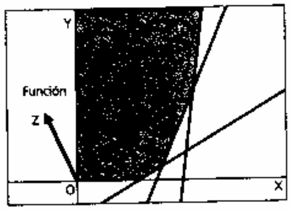
Se llama solución factible a cualquier conjunto de valores no nulos que satisfagan el conjunto de todas las restricciones del problema.

.31. ¿Cuándo se dice que una solución factible es óptima?

Se llama solución óptima a una solución factible que hace máxima o mínima la función objetivo.

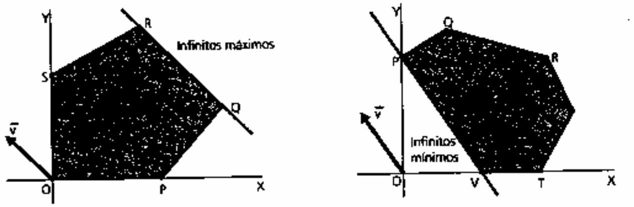
.32. Todo problema de programación lineal, ¿tiene siempre soluciones factibles?

Un problema de programación lineal puede no tener solución; por ejemplo, supongamos que se trata de maximizar la función objetivo representada en el diagrama siguiente en la región sombreada.



4.33. ¿Puede tener un problema de programación lineal infinitas soluciones? Poner un ejemplo gráfico.

En efecto, puede tener infinitas soluciones; esto ocurre cuando la función objetivo se maximiza o se minimiza en todo un borde de la región factible.



4.34. ¿A qué se llama solución óptima de un problema de programación lineal?

Se llama solución óptima a una solución que satisfaga el conjunto de todas las restricciones del problema y que además hace máxima o mínima la función objetivo.

4.35. En un problema de programación lineal en el plano, una de las rectas que definen el conjunto factible tiene los coeficientes de sus variables x e y proporcionales a los correspondientes coeficientes en la función objetivo. ¿Podríamos afirmar que el problema tiene infinitas soluciones? Justificar la respuesta.

No siempre. Supongamos el siguiente recinto y sea $\vec{v}$ el vector director de la función objetivo.

Si se trata de encontrar el máximo, este es único y se encuentra en el punto R. Ahora bien, al ser TV paralela al vector $\vec{v}$, existen infinitos valores que hacen mínima la función objetiva.