

3. ► SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

EJERCICIOS

3.1. Resolver los siguientes sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de Cramer:

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases} & 2. \begin{cases} 7x + 4y = 80 \\ 5x - 6y = 4 \end{cases} \\
 3. \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - y = -5 \end{cases} & 4. \begin{cases} 12x - 3y = 12 \\ 8x + y = 20 \end{cases} \\
 5. \begin{cases} 5x - 8y = 19 \\ 2x - 2y = 10 \end{cases} & 6. \begin{cases} 8x - 2y = 11 \\ 3y + x = 9 \end{cases}
 \end{array}$$

Resolvemos el primer sistema siguiendo todos los pasos. En los demás, por ser análogo el proceso, daremos únicamente la solución.

$$1. \quad x = \frac{\det(B, C_2)}{\det(C_1, C_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4 - 3}{-1 - 6} = 1 \quad y = \frac{\det(C_1, B)}{\det(C_1, C_2)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{1 - 8}{-7} = 1$$

$$\begin{array}{ll}
 2. \quad x = 8 & y = 8 \\
 3. \quad x = -20 & y = -15 \\
 4. \quad x = 2 & y = 4 \\
 5. \quad x = 7 & y = 2 \\
 6. \quad x = 3 & y = 2
 \end{array}$$

3.2. Resolver los siguientes sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas por el método de Cramer:

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} -x + y + z = 3 \\ x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \end{cases} & 2. \begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases} \\
 3. \begin{cases} x + 4y - 8z = -8 \\ 4x + 8y - z = 76 \\ 8x - y - 4z = 110 \end{cases} & 4. \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 28 \end{cases} \\
 5. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases} & 6. \begin{cases} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases} \\
 7. \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases} & 8. \begin{cases} 2x + y - z = 15 \\ 5x - y + 5z = 16 \\ x + 4y + z = 20 \end{cases}
 \end{array}$$

Resolveremos el primer sistema siguiendo todos los pasos. En los demás, por ser análogo el proceso, daremos únicamente la solución.

$$1. \quad x = \frac{\det(B, C_2, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{16}{4} = 4$$

$$y = \frac{\det(C_1, B, C_3)}{\det(C_1, C_2, C_3)} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$z = \frac{\det(C_1, C_2, B)}{\det(C_1, C_2, C_3)} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

2. $x = 4, \quad y = 5, \quad z = 2$
 3. $x = 16, \quad y = 2, \quad z = 4$
 4. $x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3$
 5. $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$
 6. $x = 5, \quad y = 7, \quad z = 1$
 7. $x = 3, \quad y = 3, \quad z = 3$
 8. $x = 5, \quad y = 4, \quad z = -1$

3.3. Aplicar el método de reducción para resolver el sistema $S = \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

$$\left. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} E_2 - E_1 \\ E_3 + E_1 \end{array} \quad \left. \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 2z = 0 \\ 2y = 2 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = 1 \\ y = 1 \end{array}$$

Luego la solución es: $x = 1 \quad y = 1 \quad z = 1$

3.4. Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ 2x + 3y - 3z = 4 \\ x - 3y - 5z = -6 \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases}$

Aplicando el método de Gauss, se tiene:

$$\left. \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 8 \\ 2x + 3y - 3z = 4 \\ x - 3y - 5z = -6 \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} E_1 - 3E_3 \\ E_2 - \frac{1}{2}E_3 \\ \frac{1}{2}(E_4 - 4E_3) \end{array} \quad \left. \begin{cases} 7y + 19z = 26 \\ y - 6z = -5 \\ x - 3y - 5z = -6 \\ 8y + 13z = 21 \end{cases} \right\}$$

$$\left. \begin{cases} 61z = 61 \\ y - 6z = -5 \\ x - 3y - 5z = -6 \\ 61z = 61 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} E_1 - 7E_2 \\ E_4 - 8E_2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}$$

La solución es: $x = 2 \quad y = 1 \quad z = 1$

3.5. Comprobar si el siguiente sistema es o no compatible: $\begin{cases} 3x + y - z = 5 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ y + z = 3 \end{cases}$

Para saber si es compatible, comprobaremos si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\det M \neq 0 \rightarrow \text{rango } M = 3 = \text{rango } M' = 3$

Por el teorema de Rouché, se deduce que el sistema es compatible determinado; por tanto, tiene solución única.

3.6. Resolver, utilizando el método de eliminación de Gauss, el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Este sistema se puede pasar a la forma ordinaria o resolverlo tal como está:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Restando a la tercera fila la primera, en la matriz de coeficientes y en la matriz del segundo miembro, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Restando ahora a la tercera fila la segunda, se obtiene la siguiente matriz triangular:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la tercera ecuación, se deduce: $z = 0$.

Sustituyendo en la segunda el valor de z : $y = 0$.

Llevando estos valores a la primera: $x = 1$.

3.7. Dado el sistema $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{cases}$

a) Añadir una ecuación lineal al sistema dado de modo que el sistema resultante sea incompatible.

b) Añadir una ecuación al sistema dado de modo que el sistema resultante sea compatible e indeterminado. Resolver el sistema así formado.

a) Para el primer caso, se tiene:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 5x - 5y + 2z = 1 \end{cases}$$

Formamos la matriz de los coeficientes, M , y la matriz ampliada, M' :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Rango $M = 2$, ya que la tercera fila es suma de las dos primeras, que son independientes.

Rango $M' = 3$, ya que $\det(C_1, C_2, C_3) = 40 \neq 0$.

El sistema es incompatible.

b) Para el segundo caso, se tiene:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \\ 5x - 5y + 2z = 9 \end{cases}$$

Como la tercera ecuación es suma de las dos primeras, el sistema se reduce al dado.

Para resolverlo se pasa z al segundo miembro y se aplica la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 - z \\ 2x - 3y = 4 - z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5-z & -2 \\ 4-z & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-15 + 3z + 8 - 2z}{-9 + 4} = \frac{z-7}{-5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5-z \\ 2 & 4-z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{12 - 3z - 10 + 2z}{-5} = \frac{-z+2}{-5} = \frac{z-2}{5}$$

Dando a z un valor arbitrario se obtienen las soluciones.

3.8. Resolver el siguiente sistema homogéneo, dejando como parámetros libres las incógnitas de mayor subíndice:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_5 + x_4 - x_6 = 0 \\ x_1 + x_5 - x_6 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 - 2x_6 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_5 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Se trata de un sistema lineal homogéneo de 4 ecuaciones con 5 incógnitas; por tanto, tiene infinitas soluciones, que hallaremos por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & F_1 & - & F_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & F_2 & - & F_2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & -2 & F_3 & - & F_3 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & F_4 & - & F_4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1, F_3 - F_1, F_4 + F_1} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & F_1 & - & F_1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & F_2 & - & F_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & F_3 & - & F_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & F_4 & - & F_4 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 + F_4} \left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & F_1 & - & F_1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & F_2 & - & F_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_3 & - & F_3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & F_4 & - & F_4 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_3 - x_5 = -x_4 + x_6 \\ x_1 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_2 = -x_4 + 2x_6 \\ x_3 = x_6 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

De donde las soluciones son:

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -\lambda + 2\mu \quad x_3 = \mu \quad x_4 = \lambda \quad x_5 = \mu$$

3.9. Discutir y resolver, según los distintos valores del parámetro a, los siguientes sistemas:

$$1. \begin{cases} x + y + az = 1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - y = a \\ ax + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x - ay + z = 1 \\ x + y + z = a + 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x + 12y + 4z = 0 \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ (a+2)x - 12y + 12z = 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} a^2x + a^2y + az = 1 \\ x + a^2y + z = 0 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 2x + y - z = a - 4 \\ (a-6)y + 3z = 0 \\ (a+1)x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} a^2x + 3y + 2z = 0 \\ ax - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x - ay - z = 0 \\ (2-2a)x + 5y + z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2y + az = a \\ (a-2)x + y + 3z = 0 \\ (a-1)y = 1-a \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - ay = a \\ 5x + ay = 7 \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + y = 1 \\ ay + z = 0 \\ x + (a+1)y + az = a+1 \end{cases}$$

Formamos las matrices de coeficientes y ampliada:

$$9.1. M = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 2-2a & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 & 0 \\ 2-2a & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\text{rang } M = 2 = \text{rang } M'$, para cualquier valor de a el sistema es compatible uniparamétrico.

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - ay = a \\ 5x + ay = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{2-k}{2} \\ y = \frac{k(1-2a)}{2} \\ z = k \end{cases}$$

$$9.2. M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor de a se tiene que $\text{rang } M = 2$.

$$\det M' = (1-a)(a+8) = 0 \rightarrow a = 1; a = -8$$

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, -8\}$, $\text{rang } M = 2, \text{rang } M' = 3$; el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $a = 1$, $\text{rang } M = \text{rang } M' = 2$. El sistema es compatible determinado; solución única:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

3.º caso: Para $a = -8$, $\text{rang } M = \text{rang } M' = 2$. El sistema es compatible determinado; solución única:

$$\begin{cases} 2x - y = -8 \\ -8x + 3y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 28 \end{cases}$$

$$9.3. M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$\det M = (1-a)(a+1) = 0$$

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, se verifica que $\text{rang } M = \text{rang } M' = 3$; por tanto, el sistema es compatible determinado; tiene solución única. Por Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{2-a}{a-1} \quad y = 1 \quad z = -\frac{1}{a-1} + a + 2$$

2.º caso: Para $a = -1$,

$$\begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y = 4 - z \\ x + y = 1 - z \end{cases}$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad y = -\frac{2k-5}{2} \quad z = k$$

3.º caso: Para $a = 1$,

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

De la primera y tercera ecuación se deduce que el sistema es incompatible; es decir, no tiene solución.

$$9.4. M = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ a+2 & -12 & 12 \end{pmatrix}$$

Como es un sistema lineal homogéneo, para que tenga soluciones distintas de la trivial tiene que ocurrir que rango $M < 3$; se tiene que $\det M = 76(a-10)$.

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \{10\}$, se deduce que $\det M \neq 0$, de donde rango $M = 3$ y, en consecuencia, solo existe la solución trivial:

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$$

2.º caso: Para $a = 10$.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 12y + 4z = 0 \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ 12x - 12y + 12z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + z = 0 \\ 2x - 13y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2z = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = k \\ y = 0 \\ z = -k \end{array}$$

El sistema es compatible uniparamétrico; es decir, existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$$9.5. M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 36 - 5a = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{36}{5}$$

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{36}{5}\right\}$, se deduce que $\det M \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M = 3 = \text{rango } M^*$. Por tanto, el sistema es compatible determinado; tiene solución única.

Aplicando la regla de Cramer, obtenemos la solución en función de a :

$$x = \frac{2(3a-23)}{5a-36} \quad y = \frac{2a-14}{5a-36} \quad z = \frac{2}{5a-36}$$

2.º caso: Para $a = \frac{36}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + \frac{36}{5}z = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 2 - z \\ 2x - y = 2 - 3z \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{-7k+6}{5} \quad y = \frac{k+2}{5} \quad z = k$$

$$9.6. M = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 & a \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de la matriz M .

Vemos que para $a = 0$ o para $a = 1$ rango $M < 2$.

Hagamos la discusión para los distintos valores del parámetro a .

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, se deduce que rango $M = 2 = \text{rango } M^*$. Por tanto, el sistema es compatible uniparamétrico. Aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{1}{a(a-1)} \quad y = \frac{-ak(a-1)-1}{a^2(a-1)} \quad z = k$$

2.º caso: Para $a = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} 0 = 1 \\ x + z = 0 \end{array} \right\}$$

Sistema incompatible; no existe solución.

3.º caso: Para $a = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{array} \right\}$$

Sistema incompatible, no existe solución.

$$9.7. M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-6 & 3 \\ a+1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & a-4 \\ 0 & a-6 & 3 & 0 \\ a+1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det M = a^2 - 2a - 15 = (a-5)(a+3) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 5; a = -3$$

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \{-3, 5\}$, $\det M \neq 0$ \rightarrow rango $M = 3 = \text{rango } M^*$. El sistema es compatible determinado; tiene solución única para cada valor de a .

Aplicando la regla de Cramer, se obtiene la solución:

$$x = -\frac{3}{a+3} \quad y = \frac{3(a+2)}{a+3} \quad z = \frac{(6-a)(a+2)}{a+3}$$

2.º caso: Para $a = -3$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = -7 \\ -9y + 3z = 0 \\ -2x + 2y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -9y + 3z = 0 \\ 3y - z = -4 \\ 3y - z = -4 \end{array} \right\}$$

de donde se deduce que el sistema es incompatible; no existe solución.

3.º caso: Para $a = 5$.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ -y + 3z = 0 \\ 6x + 2y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 + z \\ -y = -3z \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{1-2\lambda}{2} \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}$$

El sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$$9.8. M = \begin{pmatrix} a^2 & 3 & 2 \\ a & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det M = -5a^2 - 10a + 40 = -5(a-2)(a+4) = 0 \quad \rightarrow \quad a = 2; a = -4$$

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \{-4, 2\}$, $\det M \neq 0$ \rightarrow rango $M = 3$. En este caso el sistema únicamente tiene la solución trivial.

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$$

2.º caso: Para $a = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = -2z \\ 2x - y = -z \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{k}{2} \\ y = 0 \\ z = k \end{array}$$

El sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

3.º caso: Para $a = -4$.

$$\left. \begin{array}{l} 16x + 3y + 2z = 0 \\ -4x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -4x - y = -z \\ 8x + y = -4z \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = -\frac{5k}{4} \\ y = 6k \\ z = k \end{array}$$

El sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$$9.9. M = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ 2-2a & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 17 - 2a = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{17}{2}$$

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \left\{\frac{17}{2}\right\}$, se deduce que $\det M \neq 0$ y, por tanto, rango $M = 3$. En este caso la solución es única, la trivial.

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0$$

2.º caso: Para $a = \frac{17}{2}$.

$$\left. \begin{array}{l} x - \frac{17}{2}y - z = 0 \\ -15x + 5y + z = 0 \\ 4x + y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 5y + z = 15x \\ y = -4x \end{array} \rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -4k \\ z = 35k \end{cases}$$

Existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

9.10. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ a-2 & 1 & 3 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$ $M' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & a & a \\ a-2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$

$\det M = a(a-2)(a-1) = 0 \rightarrow a = 0; a = 1; a = 2$

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}$, se deduce que $\det M \neq 0$ y, en consecuencia, $\text{rango } M = 3 = \text{rango } M'$. Por tanto, el sistema es compatible determinado; existe una única solución para cada valor del parámetro a .

Aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = -\frac{2(a+3)}{a(a-2)} \quad y = -1 \quad z = \frac{a+2}{a}$$

2.º caso: Para $a = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} 2y = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \\ -y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \\ y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} y = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \\ y = -1 \end{array}$$

De la primera y la tercera ecuación se deduce que el sistema es incompatible (no existe solución).

3.º caso: Para $a = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ -x + y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ y + 3z = x \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -\frac{k-3}{5} \\ z = \frac{2k-1}{5} \end{cases}$$

4.º caso: Para $a = 2$.

$$\left. \begin{array}{l} 2y + 2z = 2 \\ y + 3z = 0 \\ y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y + z = 2 \\ y + 3z = 0 \\ y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} z = 3 \\ 3z = 1 \end{array}$$

Por tanto, el sistema es incompatible, no existe solución.

9.11. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & a \\ 5 & a \end{pmatrix}$ $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -a & a \\ 5 & a & 7 \end{pmatrix}$

$\det M' = -a^2 + 43a - 42 = 0 \rightarrow a = 1; a = 42$

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \{1, 42\}$, se deduce que $\det M \neq 0$, de donde $\text{rango } M' = 3$; como $\text{rango } M = 2$, el sistema es incompatible, no existe solución.

2.º caso: Para $a = 1$, $\text{rango } M = \text{rango } M' = 2$, luego el sistema es compatible determinado, la solución es única.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 3z - y = 1 \\ 5x + y = 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ 5x + y = 7 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

3.º caso: Para $a = 42$, $\text{rango } M = \text{rango } M' = 2$, luego el sistema es compatible determinado, la solución es única.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ 3x - 42y = 42 \\ 5x + 42y = 7 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ x - 14y = 14 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{49}{8} \\ y = -\frac{9}{16} \end{cases}$$

9.12. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & a+1 & a \end{pmatrix}$ $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{pmatrix}$

$\det M = a^2 - a = a(a-1) = 0 \rightarrow a = 0; a = 1$

1.º caso: $\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, se deduce que $\det M \neq 0$ y, en consecuencia, $\text{rango } M = 3 = \text{rango } M'$. El sistema es compatible determinado. Para cada valor de a existe una solución única.

Aplicando la regla de Cramer, obtenemos la solución:

$$x = \frac{a}{a-1} \quad y = -\frac{1}{a-1} \quad z = \frac{a}{a-1}$$

2.º caso: Para $a = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \\ x + y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

El sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

3.º caso: Para $a = 1$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = -z \\ x + 2y = 2 - z \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right\}$$

De la primera y la segunda ecuación se deduce que el sistema es incompatible; no existe solución.

3.10. Discutir y resolver, según los distintos valores del parámetro k , los siguientes sistemas:

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ kx + y + 3z = 4 \\ kx + y - 7z = 3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ kx - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 2x - y - z = k \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ky + 3z = 3 \\ y = z \\ 3y - z = 2 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ kx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

Formamos las matrices de coeficientes y ampliada:

10.1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ k & 1 & -7 \end{pmatrix}$ $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 3 & 4 \\ k & 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

$\det M' = 30k - 114 = 0 \rightarrow k = \frac{19}{5}$

1.º caso: $\forall k \in \mathbb{R} - \{\frac{19}{5}\}$, se deduce que $\det M' \neq 0$ y, en consecuencia, $\text{rang } M' = 4$, como $\text{rang } M = 3$, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = \frac{19}{5}$, $\text{rang } M = \text{rang } M' = 3$; por tanto, el sistema es compatible determinado; solución única:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ \frac{19}{5}x + y + 3z = 4 \\ \frac{19}{5}x + y - 7z = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ \frac{19}{5}x + y + 3z = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{10} \\ z = \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$10.2. M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ k & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det M' = 16 - 8k = 0 \Rightarrow k = 2$$

1.º caso: $\forall k \in \mathbb{R} - \{2\}$, se deduce que $\det M' \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M' = 4$, como rango $M = 3$, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = 2 \Rightarrow$ rango $M =$ rango $M' = 3$; por tanto, el sistema es compatible determinado; solución única:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

Restando primera y cuarta, se obtiene $y = 2$, y sustituyendo en las otras, se obtiene:

$$x = 1 \quad y = 2 \quad z = 1$$

$$10.3. M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \det M' = 13k - 31 = 0 \Rightarrow k = \frac{31}{13}$$

1.º caso: $\forall k \in \mathbb{R} - \left\{\frac{31}{13}\right\}$, se deduce que $\det M' \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M' = 4$, como rango $M = 3$, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = \frac{31}{13} \Rightarrow$ rango $M =$ rango $M' = 3$; por tanto, el sistema es compatible determinado; solución única:

$$\begin{cases} 2x - y - z = \frac{31}{13} \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{19}{13} \\ y = -\frac{2}{13} \\ z = \frac{9}{13} \end{cases}$$

$$10.4. M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det M' = 8 - 2k = 0 \Rightarrow k = 4$$

1.º caso: $\forall k \in \mathbb{R} - \{4\}$, se deduce que $\det M' \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M' = 4$, como rango $M = 3$, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = 4 \Rightarrow$ rango $M =$ rango $M' = 3$. Por tanto, el sistema es compatible determinado; solución única:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ y = z \\ 3y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$10.5. M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ k & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M' = 12 - 12k = 0 \Rightarrow k = 1$$

1.º caso: $\forall k \in \mathbb{R} - \{1\}$, se deduce que $\det M' \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M' = 4$, como rango $M = 3$, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = 1 \Rightarrow$ rango $M =$ rango $M' = 3$. Por tanto, el sistema es compatible determinado; solución única:

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$10.6. M = \begin{pmatrix} k & k & -1 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det M' = -40k = 0 \Rightarrow k = 0$$

1.º caso: $\forall k \in \mathbb{R} - \{0\}$, se deduce que $\det M' \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M' = 4$, como rango $M = 3$, el sistema es incompatible, no existe solución.

2.º caso: Para $k = 0$, rango $M = 2$; rango $M' = 3$, por tanto, el sistema es incompatible, no existe solución.

3.11. Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a = 1 \\ x \sin a - y \cos a = 1 \end{cases}$$

1. Resolverlo determinando x e y en función de a .

2. Calcular a para que $x + y = 1$.

$$1. \begin{cases} x \cos a + y \sin a = 1 \\ x \sin a - y \cos a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cos^2 a + y \sin a \cos a = \cos a \\ x \sin^2 a - y \sin a \cos a = \sin a \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$x(\sin^2 a + \cos^2 a) = \sin a + \cos a \Rightarrow x = \sin a + \cos a$$

De forma análoga, se obtiene $y = \sin a - \cos a$.

2. $x + y = 1$; $\sin a + \cos a + \sin a - \cos a = 1$

$$2 \sin a = 1 \Rightarrow \sin a = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ a = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

3.12. Dado el sistema

$$\begin{cases} mx - y = 1 \\ x - my = 2m - 1 \end{cases}$$

Hallar m para que:

- No tenga solución.
- Tenga infinitas soluciones.
- Tenga solución única.
- Tenga una solución en la que $x = 3$.

Formemos las matrices de coeficientes y ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} m & -1 \\ 1 & -m \end{pmatrix} \quad M' = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -m & 2m - 1 \end{pmatrix}$$

1. Para que el sistema no tenga solución tiene que ocurrir que:

$$\text{rango } M = 1 \quad \text{rango } M' = 2$$

$$\text{rango } M = 1 \Leftrightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } m = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } M' = 1$$

$$\text{Para } m = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango } M' = 2$$

Luego el sistema no tiene solución para $m = -1$.

2. El sistema tiene infinitas soluciones para $m = 1$, ya que rango $M =$ rango $M' = 1$.

3. El sistema tiene solución única para todo m distinto de 1 y -1 , ya que:
 $\text{rango } M = \text{rango } M^* = 2$

4. Si $x = 3$, sustituyendo en el sistema, resulta:

$$\left. \begin{aligned} 3m - y &= 1 \\ 3 - my &= 2m - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3m^2 - ym &= m \\ 3 - my &= 2m - 1 \end{aligned} \right\}$$

Restando miembro a miembro, resulta:

$$3m^2 - 3 = m - 2m + 1 = 3m^2 + m - 4 = 0 \Rightarrow m = 1 \quad \text{y} \quad m = -\frac{4}{3}$$

Para $m = 1$, ya vimos que el sistema tiene infinitas soluciones.

Para $m = -\frac{4}{3}$, la solución es: $x = 3, \quad y = -5.$

3.13. **Discutir y resolver, según los distintos valores de los parámetros λ y μ , los siguientes sistemas:**

$$\begin{aligned} 1. \quad & \begin{cases} 2x + y = 1 \\ \lambda^2 x + \mu y = 2 \end{cases} & 2. \quad & \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y - z = -1 \\ 2x - y + \lambda z = \mu \end{cases} \\ 3. \quad & \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + \lambda z = \mu \end{cases} & 4. \quad & \begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = \mu \\ 2x - 5y + \lambda z = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Formamos las matrices de coeficientes y ampliada.

$$1. \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \lambda^2 & \mu \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \lambda^2 & \mu & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 2\mu - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \mu = \frac{\lambda^2}{2}$$

1.º caso: Si $\mu = \frac{\lambda^2}{2} \Rightarrow \text{rango } M = 1$ y $\text{rango } M^* = 2$, entonces el sistema es incompatible; no tiene solución.

2.º caso: Si $\mu \neq \frac{\lambda^2}{2} \Rightarrow \text{rango } M = \text{rango } M^* = 2$. El sistema es compatible determinado; solución única.

Por la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{2 - \mu}{\lambda^2 - 2\mu} \quad y = \frac{\lambda^2 - 4}{\lambda^2 - 2\mu}$$

$$2. \quad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

$$\det M = 2(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

Sustituimos $\lambda = 3$ en la matriz M^* y calculamos el rango:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & \mu \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & \mu - 3 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 5 \end{pmatrix}$$

Así pues: si $\mu = 5 \Rightarrow \text{rango } M^* = 2$
 si $\mu \neq 5 \Rightarrow \text{rango } M^* = 3$

1.º caso: $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{3\} \Rightarrow \det M \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 3$ y $\text{rango } M^* = 3$.
 Sistema compatible determinado, solución única. Aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{2\lambda - \mu - 1}{\lambda - 3} \quad y = \frac{\mu - \lambda - 2}{\lambda - 3} \quad z = \frac{\mu - 5}{\lambda - 3}$$

2.º caso: Para $\lambda = 3$ y $\mu \neq 5$, se deduce que $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 3$; por tanto, el sistema es incompatible; no existe solución.

3.º caso: Para $\lambda = 3$ y $\mu = 5$, se deduce que $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 2$; por tanto, el sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$$x = 3k \quad y = 1 - 3k \quad z = 2 - 3k$$

$$3. \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$$

$$\det M = 5\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5}$$

Sustituimos $\lambda = \frac{4}{5}$ en la matriz M^* y calculamos el rango:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -12 \\ 0 & 5 & -4 & \mu - 8 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \mu + 4 \end{pmatrix}$$

Así pues: si $\mu = -4 \Rightarrow \text{rango } M^* = 2$
 si $\mu \neq -4 \Rightarrow \text{rango } M^* = 3$

1.º caso: $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow \det M \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 3$ y $\text{rango } M^* = 3$.

Sistema compatible determinado; solución única. Aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = -\frac{2\lambda + \mu + 4}{5\lambda} \quad y = -\frac{4(3\lambda - \mu - 4)}{5\lambda} \quad z = \frac{\mu + 4}{\lambda}$$

2.º caso: Para $\lambda = 0$ y $\mu \neq -4$, se deduce que $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 3$; por tanto, el sistema es incompatible; no existe solución.

3.º caso: Para $\lambda = 0$ y $\mu = -4$, se deduce que $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 2$; por tanto, el sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$$x = 4k \quad y = -4 - 16k \quad z = -2 - 20k$$

$$4. \quad M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & \lambda \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \mu \\ 2 & -5 & \lambda & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 13\lambda - 13 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Sustituimos $\lambda = 1$ en la matriz M^* y calculamos el rango:

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \mu \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \mu \\ 2 & -13 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mu \\ 2 & -13 & -1 & -2 \\ 3 & -13 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Así pues: si $\mu = 3 \Rightarrow \text{rango } M^* = 2$
 si $\mu \neq 3 \Rightarrow \text{rango } M^* = 3$

1.º caso: $\forall \lambda \in \mathbb{R} - \{1\} \Rightarrow \det M \neq 0 \Rightarrow \text{rango } M = 3$ y $\text{rango } M^* = 3$.

Sistema compatible determinado, solución única. Aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{\lambda(\mu + 4) - 10\mu + 23}{13(\lambda - 1)} \quad y = \frac{3\mu - 1}{13} - \frac{\mu - 3}{13(\lambda - 1)} \quad z = \frac{\mu - 3}{\lambda - 1}$$

2.º caso: Para $\lambda = 1$ y $\mu \neq 3$, se deduce que $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 3$; por tanto, el sistema es incompatible; no existe solución.

3.º caso: Para $\lambda = 1$ y $\mu = 3$, se deduce que $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 2$; por tanto, el sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$$x = 5k \quad y = \frac{5k + 5}{9} \quad z = \frac{65k + 7}{9}$$

3.14. **Hallar las posiciones relativas de los siguientes pares de rectas:**

$$a) \left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ x + y &= 2 \end{aligned} \right\} \quad b) \left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 10 \end{aligned} \right\} \quad c) \left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$a) \text{ Sean } M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \text{ rango } M = 2; \text{ rango } M^* = 2$$

El sistema es compatible determinado; por tanto, tiene solución única.

Las rectas dadas por cada una de las ecuaciones se cortan, es decir, son secantes.

b) Sean $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$; rango $M = 1$; rango $M^* = 1$

El sistema es compatible uniparamétrico; por tanto, tiene infinitas soluciones que dependen de un parámetro. Las rectas dadas por cada una de las ecuaciones son coincidentes.

c) Sean $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$; rango $M = 1$; rango $M^* = 2$

El sistema es incompatible; por tanto, no tiene solución. Las rectas dadas por cada una de las ecuaciones son paralelas.

PROBLEMAS

- 3.15. Cierta supermercado hace el mismo pedido a tres proveedores diferentes: A, B y C. Dicho pedido contiene ciertas cantidades de arroz, lentejas y garbanzos (expresadas en kg). Cada uno de los proveedores marca para los distintos productos los precios recogidos en la tabla siguiente (expresados en euros/kg):

	Arroz	Lentejas	Garbanzos
Proveedor A	0,75	1,5	2
Proveedor B	1	1,5	1,75
Proveedor C	1	1,5	2

El pedido que recibe del proveedor A le cuesta 800 euros, el que recibe del B le cuesta 25 euros más que el anterior, y el que recibe del C le cuesta 25 euros más que este último.

- a) Formular el problema y determinar la composición del pedido.
b) Este sistema, ¿de qué tipo es?

- a) Sean x el número de toneladas de arroz, y el de lentejas, z el de garbanzos.

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} 0,75x + 1,5y + 2z = 800 \\ 1x + 1,5y + 1,75z = 825 \\ 1x + 1,5y + 2z = 850 \end{cases}$$

Resolviendo: $x = 200$; $y = 300$; $z = 100$.

Solución: 200 kilos de arroz, 300 de lentejas, 100 de garbanzos.

- b) El sistema es compatible determinado.

- 3.16. Un individuo invirtió 60 000 euros repartidos en tres empresas y obtuvo 4 500 euros de beneficios. Calcular la inversión realizada en cada empresa, sabiendo que en la empresa A hizo el doble de inversión que en la B y C juntas y que los beneficios de las empresas fueron del 5% en la empresa A, 10% en la B y 20% en la C.

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} A + B + C = 60\,000 \\ A - 2B - 2C = 0 \\ 0,05A + 0,1B + 0,2C = 4\,500 \end{cases}$$

Resolviendo: $A = 40\,000$ $B = 15\,000$ $C = 5\,000$

En la empresa A invierte 40 000 euros; en la B invierte 15 000 euros, y en la C invierte 5 000 euros.

- 3.17. Los animales de un laboratorio deben mantenerse bajo una dieta estricta. Cada animal recibe 10 g de proteínas y 3 g de grasas. Se dispone de dos tipos de alimentos: el tipo A con el 5% de proteínas y 3% de grasas y el tipo B con el 10% de proteínas y 1% de grasas.

¿Cuántos gramos de cada alimento pueden utilizarse para obtener la dieta correcta de un único animal?

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} \frac{5A}{100} + \frac{10B}{100} = 10 \\ \frac{3A}{100} + \frac{B}{100} = 3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se tiene: $A = 80$ $B = 60$

Solución: 80 gramos del tipo A, 60 gramos del tipo B.

- 3.18. El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 5 000 euros (sin impuestos). El valor del vino es 600 euros menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que por los refrescos deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por el vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 5 924 euros, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.

Sean R euros en refrescos, C euros en cervezas y V euros en vino las cantidades invertidas en cada tipo de bebida.

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} R + C + V = 5\,000 \\ R + C - V = 600 \\ \frac{6R}{100} + \frac{12C}{100} + \frac{30V}{100} = 924 \end{cases}$$

equivalente a:

$$\begin{cases} R + C + V = 5\,000 \\ R + C - V = 600 \\ 6R + 12C + 30V = 92\,400 \end{cases}$$

Resolviendo: $R = 1\,200$ $C = 1\,600$ $V = 2\,200$

Solución: 1 200 euros en refrescos, 1 600 euros en cervezas y 2 200 euros en vino.

- 3.19. Un amigo dice a otro: «Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes, y cuando tú tengas la edad que yo tengo ahora, la suma de nuestras edades será 36 años». ¿Qué edad tiene cada uno?

Sea x la edad del que habla e y la edad de su amigo.

Las condiciones del problema se traducen en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x' = 2(y - (x - y)) \\ x + (x - y) + x = 36 \end{cases}$$

equivalente a:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ 3x - y = 36 \end{cases}$$

Solución: $x = 16$ $y = 12$

Las edades son 16 años y 12 años.

- 3.20. Sixto le dice a Pedro: «Yo tengo el doble de la edad que usted tenía cuando yo tenía la edad que usted tiene. La suma del triple de la edad que usted tiene con la que yo tendré cuando usted tenga la edad que yo tengo es 280 años». ¿Cuáles son las edades de Sixto y Pedro?

Sea x la edad de don Sixto e y la edad de don Pedro. Las condiciones del problema se traducen en el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x = 2(y - (x - y)) \\ x + (x - y) + 3y = 280 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4y - 3x = 0 \\ 2x + 2y = 280 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

Edad de don Sixto: $x = 80$ años.

Edad de don Pedro: $y = 60$ años.

- 3.21. La edad de un padre es doble de la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de los hijos) la edad del padre era el triple de la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de edades de las tres personas será 150 años. ¿Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?

Edades actuales: padre = x , hijo mayor = y , hijo menor = z .

Hoy: $x = 2(y + z)$
 Hace $y - z$ años: $x - (y - z) = 3(y - (y - z) + z - (y - z))$
 Dentro de $y + z$ años: $x + (y + z) + y + (y + z) + z + (y + z) = 150$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 8z = 0 \\ x + 4y + 4z = 150 \end{cases}$$

Resolviendo: $x = 50$ $y = 15$ $z = 10$

Edades: padre = 50 años, hijo mayor = 15, hijo menor = 10.

Al nacer los hijos, el padre tenía 35 y 40 años, respectivamente.

- 3.22. Fernando tiene 10 litros de mezcla de agua y vino. Al probarla observa que es demasiado ligera, por lo que decide añadir una cierta cantidad de vino, y entonces la cantidad de agua es el 30 % del total. Como sigue siendo ligera, añade de nuevo la misma cantidad de vino que antes, y entonces la cantidad de agua es el 20 % del total. ¿Cuántos litros de vino se añade en cada ocasión y cuántos hay de agua?

Fernando tiene inicialmente 10 litros de mezcla con a litros de agua y v litros de vino.

Por tanto:

$$10 = a + v$$

Al añadir v' litros de vino, se tiene:

$$a = \frac{30(10 + v')}{100}$$

Al añadir de nuevo la misma cantidad de vino, v' litros, se tiene:

$$a = \frac{20(10 + 2v')}{100}$$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} 100a = 300 + 30v' \\ 100a = 200 + 40v' \end{cases}$$

Resolviendo: $a = 6$ $v' = 10$

Por tanto, el agua inicial es 6 litros, y el vino añadido en cada ocasión, 10 litros.

- 3.23. Se venden tres especies de cereales: trigo, cebada y mijo.

El trigo se vende cada «cahíz» por 4 denarios.

La cebada se vende cada «cahíz» por 2 denarios.

El mijo se vende cada «cahíz» por 0,5 denarios.

Si se venden 100 «cahices» y se obtiene por la venta 100 denarios, ¿cuántos «cahices» de cada especie se venden? Interpretar la(s) solución(es).

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 4x + 2y + 0,5z = 100 \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a:

$$\begin{cases} y + z = 100 - x \\ 4y + z = 200 - 8x \end{cases}$$

Resolviendo:

$$y = \frac{100 - 7x}{3} \quad z = \frac{200 + 4x}{3}$$

Dando a x los valores 1, 2, 3, 4, ... elegimos únicamente los valores tanto de y como de z que sean también enteros, positivos y menores que 100. La tabla de soluciones es:

	1	4	7	10	13
	31	24	17	10	3
	68	72	76	80	84

- 3.24. Tres amigos acuerdan jugar tres partidas de dados de forma que cuando uno pierda una partida entregará a cada uno de los otros dos una cantidad igual a la que cada uno de ellos posea en ese momento. Cada uno perdió una partida y al final cada uno tenía 2,40 euros. ¿Cuánto dinero tenía cada jugador al comenzar el juego?

Sean x , y , z las cantidades del primero, segundo y tercer jugador, respectivamente, al principio del juego. Es evidente que se juegan tres partidas, ya que cada uno pierde una.

Supongamos que la primera partida la pierde el primer jugador; el saldo de cada uno en ese instante será:

Primer jugador: $x - y - z$
 Segundo jugador: $2y$
 Tercer jugador: $2z$

Supongamos que la segunda partida la pierde el segundo jugador; el saldo de cada uno en ese instante será:

Primer jugador: $2(x - y - z)$
 Segundo jugador: $2y - (x - y - z) - 2z = 3y - x - z$
 Tercer jugador: $4z$

Supongamos que la tercera partida la pierde el tercer jugador; el saldo de cada uno en ese instante será:

Primer jugador: $4(x - y - z)$
 Segundo jugador: $2(3y - x - z)$
 Tercer jugador: $4z - 2(x - y - z) - (3y - x - z)$

Como todos terminan con la misma cantidad de dinero, 2,4 euros, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 4(x - y - z) = 2,4 \\ 2(3y - x - z) = 2,4 \\ -x - y + 7z = 2,4 \end{cases}$$

equivalente a:

$$\begin{cases} x - y - z = 0,6 \\ -x + 3y - z = 1,2 \\ -x - y + 7z = 2,4 \end{cases}$$

Resolviendo: $x = 3,9$ $y = 2,1$ $z = 1,2$

Los tres amigos tenían 3,9 euros, 2,1 euros y 1,2 euros antes de comenzar la partida.

3.25. Un orfebre tiene dos lingotes: el primero contiene 540 g de oro y 60 g de cobre, y el segundo, 400 g de oro y 100 g de cobre. ¿Qué cantidad deberá tomar de cada uno de ellos para formar otro lingote que pese 640 g y cuya ley sea 0,825?

Ley del primer lingote: $\frac{540}{600} = 0,900$

Ley del segundo lingote: $\frac{400}{500} = 0,800$

Sean x la cantidad que el orfebre debe tomar del primer lingote e y la del segundo lingote.

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} x + y = 640 \\ 0,900x + 0,800y = 0,825 \cdot 640 \end{cases}$$

Operando:

$$\begin{cases} x + y = 640 \\ 9x + 8y = 5280 \end{cases}$$

Resolviendo: $x = 160$ $y = 480$

Por tanto, hay que tomar: 160 gramos del primer lingote y 480 gramos del segundo lingote.

3.26. Hierón, rey de Siracusa, había dado a un platero 7 465 g de oro para hacer una corona que quería ofrecer a Júpiter. Para conocer si el orfebre había reemplazado oro por plata le pidió a Arquímedes que lo averiguara, sin dañar la corona. Arquímedes metió la corona en agua y perdió 467 g de su peso. Se sabe que el oro pierde en el agua 52 milésimas de su peso y que la plata pierde 95 milésimas. Hallar los gramos de oro y plata de la corona real.

Sean x e y los pesos de oro y plata, respectivamente. Las condiciones del problema se traducen en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 7465 \\ 0,052x + 0,095y = 467 \end{cases}$$

Operando:

$$\begin{cases} x + y = 7465 \\ 52x + 95y = 467000 \end{cases}$$

Resolviendo: $x = 5632$ $y = 1833$ aproximando décimas.

Por tanto, la cantidad de oro y plata de la corona es:

$$x = 5632 \text{ gramos de oro} \quad y = 1833 \text{ gramos de plata}$$

3.27. ¿Cuántos litros de leche con 35 % de grasa han de mezclarse con leche de 4 % de grasa para obtener 20 litros de leche con 25 % de grasa?

Sean x los litros de la primera clase e y los litros de la segunda clase.

El sistema resultante es: $\begin{cases} x + y = 20 \\ 0,35x + 0,04y = 0,25 \cdot 20 \end{cases}$

Resolviendo: $x = \frac{420}{31}$ $y = \frac{200}{31}$

Por tanto, hay que mezclar $\frac{420}{31}$ litros de la primera con $\frac{200}{31}$ litros de la segunda.

3.28. Se tienen tres lingotes compuestos del siguiente modo:

— El primero de 20 g de oro, 30 g de plata y 40 g de cobre.

— El segundo de 30 g de oro, 40 g de plata y 50 g de cobre.

— El tercero de 40 g de oro, 50 g de plata y 90 g de cobre.

Se pide qué peso habrá de tomarse de cada uno de los lingotes anteriores para formar un nuevo lingote de 34 g de oro, 46 g de plata y 67 g de cobre.

Sean x, y, z las cantidades que hay que tomar de cada lingote.

En el primer lingote, la ley de oro es: $\frac{20}{90} = \frac{2}{9}$

En el segundo lingote, la ley de oro es: $\frac{30}{120} = \frac{1}{4}$

En el tercer lingote, la ley de oro es: $\frac{40}{180} = \frac{2}{9}$

Con esto, la ecuación resultante para el oro es: $\frac{2x}{9} + \frac{y}{4} + \frac{2z}{9} = 34$ [1]

En el primer lingote, la ley de plata es: $\frac{30}{90} = \frac{1}{3}$

En el segundo lingote, la ley de plata es: $\frac{40}{120} = \frac{1}{3}$

En el tercer lingote, la ley de plata es: $\frac{50}{180} = \frac{5}{18}$

Con esto, la ecuación resultante para la plata es: $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{5z}{18} = 46$ [2]

En el primer lingote, la ley de cobre es: $\frac{40}{90} = \frac{4}{9}$

En el segundo lingote, la ley de cobre es: $\frac{50}{120} = \frac{5}{12}$

En el tercer lingote, la ley de cobre es: $\frac{90}{180} = \frac{1}{2}$

Con esto, la ecuación resultante para el cobre es: $\frac{4x}{9} + \frac{5y}{12} + \frac{z}{2} = 67$ [3]

El sistema formado por las ecuaciones [1], [2] y [3] es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} 8x + 9y + 8z = 34 \cdot 36 \\ 6x + 6y + 5z = 46 \cdot 18 \\ 16x + 15y + 18z = 67 \cdot 36 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, se obtiene: $x = 45$ $y = 48$ $z = 54$

Deben tomarse 45 gramos del primer lingote, 48 gramos del segundo lingote y 54 gramos del tercero.

CUESTIONES

3.29. El determinante de un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas es 0. ¿Puede ser el sistema compatible? ¿E incompatible? Razonar las respuestas con un ejemplo.

Puede ser compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases} \rightarrow 2x + y = 1 \rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = 1 - 2k \end{cases}$$

Y también puede ser incompatible (sin solución).

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$$

En el ejemplo primero, los rangos de la matriz de coeficientes y ampliada son iguales. En cambio, en el ejemplo segundo los rangos son distintos.

3.30. En un sistema de ecuaciones lineales, $\det(M) = 0$, ¿puede tener solución el sistema? ¿Se puede aplicar la regla de Cramer? Razonar la respuesta.

El sistema puede ser compatible o incompatible.

Consideremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, y sea M la matriz de los coeficientes y M^* la matriz ampliada.

Sea $\text{rango } M = 2$, entonces es evidente que $\det M = 0$. Con esta condición pueden darse dos casos:

Si $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 3$, el sistema es incompatible.

Si $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 2$, el sistema es compatible.

Si el sistema es compatible, puede resolverse por Cramer utilizando el siguiente proceso:

Se eligen dos ecuaciones linealmente independientes y se pasa una de las incógnitas al segundo miembro, de modo que el rango de la matriz de los coeficientes del nuevo sistema sea 2. Se tiene así un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que se puede aplicar la regla de Cramer.

3.31. El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 1. ¿Qué rango puede tener como máximo la matriz ampliada? Razonar la respuesta.

El rango de la matriz ampliada puede ser como máximo 2.

En efecto, si $\text{rango}(C_1, C_2, C_3, B) = 2$,
o $\text{rango}(C_1, C_2, C_3, B) = 1$.

3.32. Un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es homogéneo y el rango de la matriz de los coeficientes es 2. Si se interpretan las ecuaciones como rectas, ¿tienen algún punto en común? ¿Cuál es? Razonar las respuestas geoméricamente.

Sabemos que un sistema homogéneo es siempre compatible. Por tanto, el número de soluciones depende del rango de la matriz de los coeficientes.

Si el rango de la matriz de los coeficientes es 2, la solución del sistema es un punto.

El punto donde se cortan las dos rectas es el origen de las coordenadas.

Nótese que una recta $Ax + By = 0$ que no tiene término independiente pasa siempre por el origen.

3.33. Si el rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es 2, ¿puede ser compatible el sistema? ¿Puede ser compatible y determinado? ¿Puede ser incompatible? Razonar las respuestas, a poder ser con ejemplos concretos.

El sistema puede ser compatible o incompatible.

Sean M la matriz de los coeficientes y M^* la matriz ampliada, siendo $\text{rango}(M) = 2$. Con esta condición pueden darse dos casos:

Si $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 3$, el sistema es incompatible.

Si $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 2$, el sistema es compatible, pero la solución no es única, ya que tiene infinitas soluciones dependientes de un parámetro; se trata de una recta de soluciones.

Un ejemplo del primer caso:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 2 \end{cases}$$

Un ejemplo del segundo caso:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 5x + 6y + 7z = 8 \\ 9x + 10y + 11z = 2 \end{cases}$$

En este sistema: $E_3 = 2 \cdot E_2 - E_1$.

3.34. Un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas, ¿puede ser compatible y determinado? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

Puede serlo. Para ello basta que el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada sean 2. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 6 \\ 3x + y = 22 \end{cases}$$

que tiene por solución $(x, y) = (7, 1)$.

3.35. ¿Qué razón desaconseja el sistema de Cramer para sistemas de muchas ecuaciones?

Si un sistema de ecuaciones tiene muchas ecuaciones, es desaconsejable el método de Cramer, ya que el desarrollo de un determinante de orden elevado es muy pesado, y muy fácil equivocarse en su cálculo.

3.36. Sea un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. Discutir todas las posibilidades de compatibilidad e incompatibilidad, así como el número de soluciones de estas si existen.

$$\text{Sea el sistema } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad M^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{pmatrix}$$

1.º caso: Si $\text{rango } M = \text{rango } M^* = 3$, el sistema es compatible determinado (solución única).

2.º caso: Si $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 3$, el sistema es incompatible (no existe solución).

3.º caso: Si $\text{rango } M = 2$ y $\text{rango } M^* = 2$, el sistema es compatible uniparamétrico (infinitas soluciones que dependen de un parámetro).

4.º caso: Si $\text{rango } M = 1$ y $\text{rango } M^* = 2$, el sistema es incompatible (no existe solución).

5.º caso: Si $\text{rango } M = 1$ y $\text{rango } M^* = 1$, el sistema es compatible biparamétrico (infinitas soluciones que dependen de dos parámetros).

3.37. Sea un sistema homogéneo $AX = 0$. De las siguientes afirmaciones, justificar razonadamente las que sean ciertas, o poner algún contraejemplo de las que sean falsas.

a) Un sistema homogéneo siempre es compatible determinado.

b) Si x_1 y x_2 son soluciones de $AX = 0$, una combinación lineal de estas también da solución del sistema.

a) Falsa, ya que puede tener solución única (la solución trivial) o puede tener infinitas soluciones dependientes de un parámetro.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{solución única.}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2\lambda \end{cases} \quad \text{infinitas soluciones.}$$

b) Cierta, ya que:

Si x_1 es solución, se verifica $A x_1 = 0$.

Si x_2 es solución, se verifica $A x_2 = 0$.

Entonces, $a x_1 + b x_2$ será también solución, pues:

$$A (a x_1 + b x_2) = a A x_1 + b A x_2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

- 3.38. El siguiente sistema de ecuaciones lineales, S, es compatible determinado y representa, por tanto, tres planos que se cortan en un punto:

$$S = \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ x + y - z = 4 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

- a) Si se prescinde en S de una de las ecuaciones, ¿cómo es el sistema que resulta?
- b) ¿Qué ecuación se debe quitar para que el nuevo sistema tenga entre sus soluciones la $(0, 0, 0)$?
- c) Si se añade una nueva ecuación a S, el sistema resultante puede ser:
1. ¿Compatible y determinado?
 2. ¿Compatible indeterminado?
 3. ¿Incompatible?

Justificar la respuesta y poner un ejemplo de cada uno de ellos, si es posible.

- a) Quedan dos planos que se cortan según una recta. Por tanto, el sistema es compatible uniparamétrico (infinitas soluciones que dependen de un parámetro).
- b) Hemos de suprimir la segunda ecuación.
- c) 1. Si añadimos una ecuación que sea combinación lineal de las del sistema, tendrá las mismas soluciones y el sistema será compatible determinado.
2. No es posible.
3. Basta añadir una ecuación que no verifique la solución del sistema. De esta forma, el punto de corte de los tres planos no pertenecerá a este nuevo plano y el sistema será incompatible.