PAU MATEMÀTIQUES II. SETEMBRE 2006

EXERCICI A

PROBLEMA 1. Donat el sistema d'equacions amb un paràmetre real λ i incògnites x, y, z,
$\left.\begin{cases}(\lambda+2)x - y + z = 0\\ 3x + (\lambda+6)y - 3z = 0\\ 5x + 5y + (\lambda-2)z = 0\end{cases}\right\}$ es demana:

a) Calculeu per a quins valors de λ el sistema només admet la solució $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ **(1 punt).**
b) Per a cada valor de λ que fa indeterminat el sistema, **obteniu** totes les seues solucions **(1,8 punts).**
c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema quan $\lambda = -3$ **(0,5 punts).**

Solució.-

a) Serà per als valors de λ que facen compatible determinat el sistema, per tant haurà de ser:

$$0 \neq \begin{vmatrix}\lambda+2 & -1 & 1\\ 3 & \lambda+6 & -3\\ 5 & 5 & \lambda-2\end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda$$

Les arrels d'aquest polinomi són $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -3$.

Per tant el sistema admet la solució única (0, 0, 0) per a tots els valors de λ distints de 0 i de –3.

b)

-per a $\lambda = 0 \rightarrow rg\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 6 & -3\\ 5 & 5 & -2\end{pmatrix} = 2$; un menor principal $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 6\end{vmatrix} = 15 \rightarrow$ el sistema seria equivalent a $\left.\begin{matrix}2x - y = -z\\ 3x + 6y = 3z\end{matrix}\right\}$ que, resolt per Cramer, dóna:

$$\left.\begin{matrix} x = \dfrac{\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 3\lambda & 6\end{vmatrix}}{15} = -\dfrac{\lambda}{5}\\ y = \dfrac{\begin{vmatrix}2 & -\lambda\\ 3 & 3\lambda\end{vmatrix}}{15} = \dfrac{3\lambda}{5}\\ z = \lambda\end{matrix}\right\} \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

-per a $\lambda = -3 \rightarrow rg\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 3 & 3 & -3\\ 5 & 5 & -5\end{pmatrix} = 1 \rightarrow$ el sistema seria equivalent a $-x - y + z = 0\}$. La solució general seria: $\left.\begin{matrix}x = -\lambda + \mu\\ y = \lambda\\ z = \mu\end{matrix}\right\} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}$.

c) Com per a λ = –3, les tres equacions són equivalents, es tracta de tres plans coincidents.

PROBLEMA 2. En l'espai es consideren:

- La recta ***r*** intersecció dels plans d'equacions implícites $2x - 2y - z = 9$ i $4x - y + z = 42$.
- I la recta ***s*** que passa pels punts (1,3,-4) i (3,-5,-2). Es demana:

a) Calculeu les equacions paramètriques de la recta ***r*** **(0,8 punts)** i de la recta ***s*** **(0,3 punts).**
b) Justifiqueu que les rectes ***r*** i ***s*** s'encreuen **(0,8 punts).**
c) Calculeu un vector direccional de la recta ***t***, perpendicular comú a les rectes ***r*** i ***s***, **(0,4 punts)** i **calculeu** el punt P d'intersecció de les rectes ***s*** i ***t*** **(1 punt).**

Solució.-

a) Les equacions paramètriques de r les obtenim resolent el sistema $\left.\begin{matrix}2x - 2y - z = 9\\ 4x - y + z = 42\end{matrix}\right\}$, que dóna com a solució general $\left.\begin{matrix}x = \lambda\\ y = -17 + 2\lambda\\ z = 25 - 2\lambda\end{matrix}\right\}$

El vector direcció de la recta s és: $\overrightarrow{(2,-8,2)}$, o bé simplificat $\overrightarrow{(1,-4,1)}$. Aleshores, les equacions paramètriques: $\left.\begin{matrix}x = 1 + \mu\\ y = 3 - 4\mu\\ z = -4 + \mu\end{matrix}\right\}$

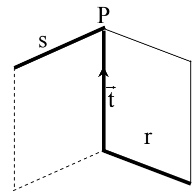
b) Les direccions de les rectes, respectivament $\overrightarrow{(1,2,-2)}$ i $\overrightarrow{(1,-4,1)}$ són distintes. Si tingueren un punt comú, el sistema següent hauria de ser compatible:

$$\left.\begin{matrix}1 + \mu = \lambda\\ 3 - 4\mu = -17 + 2\lambda\\ -4 + \mu = 25 - 2\lambda\end{matrix}\right\}$$

però eliminant λ i simplificant, queda que $\left.\begin{matrix}\mu = 3\\ \mu = 9\end{matrix}\right\}$, és a dir, el sistema és incompatible. Per tant les rectes es creuen.

c) El vector de la recta t és el producte vectorial dels vectors de r i s:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & -4 & 1\end{vmatrix} = -6\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} = \overrightarrow{(-6,-3,-6)}, \text{ o bé simplificat: } \overrightarrow{(2,1,2)}.$$



El punt P serà la intersecció de s amb el pla que determinen r i $\vec{t}$, l'equació del qual serà:

$$\begin{vmatrix}x & y+17 & z-25\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow 2x - 2y - z - 9 = 0$$

Substituint les equacions paramètriques de s en aquest pla:

$2(1 + \mu) - 2(3 - 4\mu) - (-4 + \mu) - 9 = 0 \leftrightarrow \mu = 1 \rightarrow P = (2, -1, -3)$

PROBLEMA 3. Donades les funcions $f(x) = x^3 - 3x + 8$ i $g(x) = -3x$, es demana:

a) Calculeu el màxim absolut de la funció $f(x)$ en l'interval $[-3, 0]$ **(1 punt).**
b) Calculeu el punt de tall de la corba $y = f(x)$ i la recta $y = g(x)$ **(1 punt).**
c) Obteniu l'àrea del recinte limitat per la corba $y = f(x)$ i les rectes $y = g(x)$, $x = -3$ i $x = 0$ **(1,3 punts).**

Solució.-

a) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \to x = \pm 1$.

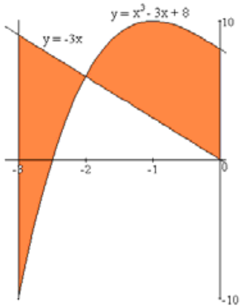
$f''(x) = 6x \begin{cases} f''(1) = 6 > 0 \to \text{en el punt 1 agafa un mínim relatiu} \\ f''(-1) = -6 < 0 \to \text{en el punt } -1 \text{ agafa un màxim relatiu} \end{cases}$

El valor de la funció en el màxim relatiu és $f(-1) = 10$. A més a més, el valor de la funció en els extrems de l'interval (on podria agafar algún màxim absolut) són: $\begin{cases} f(-3) = -10 \\ f(0) = 8 \end{cases}$.

Per tant, f agafa el màxim absolut en el punt $x = -1$ i el seu valor és 10.

b) Igualant les equacions respectives, hem de resoldre l'equació: $x^3 - 3x + 8 = -3x \to$ $\to x = -2$. Aleshores el punt buscat és $(-2, f(-2)) = (-2, 6)$.

c) El recinte, l'àrea del qual hem de calcular, està representat en la figura



$$\int_{-3}^{-2} \left(-3x - x^3 + 3x - 8\right)dx + \int_{-2}^{0} \left(x^3 - 3x + 8 + 3x\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} - 8x\right]_{-3}^{-2} + \left[\frac{x^4}{4} + 8x\right]_{-2}^{0} = \frac{81}{4}$$

PROBLEMA 4. Un incendi s'estén en forma circular uniformement. El radi del cercle cremat creix a la velocitat constant d' $1{,}8\,m/min$.

a) Obteniu l'àrea cremada en funció del temps t transcorregut des de l'inici de l'incendi **(1,3 punts).**

b) Calculeu la velocitat de creixement de l'àrea del cercle cremat en l'instant en què el radi arribe als 45 m **(2 punts).**

Solució.-

a) $S = \pi(1{,}8t)^2 = 3{,}24\pi t^2\ m^2$ (t en minuts)

b) La velocitat de creixement de l'àrea serà:

$$V(t) = \frac{dS}{dt} = 6{,}48\pi t \ \ m^2/min$$

El temps passat quan el radi siga 45 m, serà:

$$1{,}8t = 45 \to \ t = \frac{45}{1{,}8} = 25 \ min$$

La velocitat de creixement de l'àrea cremada als 25 minuts serà :

$$V(25) = 6{,}48 \cdot \pi \cdot 25 = 162\pi\ m^2/min \cong 508{,}94\ m^2/min$$

EXERCICI B

PROBLEMA 1. A és una matriu 3×3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ i $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Es demana:

a) Calculeu el determinant de la matriu A^3 **(0,5 punts)** i la matriu inversa de A^3 **(1 punt).**

b) Calculeu la matriu fila $X = (x, y, z)$ que és solució de l'equació matricial $XA^3 = BA^2$, en què B és la matriu fila $B = (1, 2, 3)$ **(1,3 punts).**

c) Calculeu la matriu inversa de A **(0,5 punts).**

Solució.-

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ = *(per la regla de Sarrus)* = 3 – 8 + 4 = –1

$$\left(A^3\right)^{-1} = \frac{1}{-1}\text{Adj}\left(A^3\right)^t = -\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $X = B \cdot A^2 \cdot (A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Com $A^3 \cdot (A^{-1})^3 = A \cdot A \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} = I \to (A^{-1})^3 = (A^3)^{-1}$. Aleshores:

$$A^{-1} = A^2 \cdot (A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2. En l'espai es consideren:

- El pla π que passa pels punts (11, 1, 2), (5, 7, 5) i (7, –1, –2).
- I la recta r intersecció dels plans d'equacions implícites $x + y + z = 15$ i $2x - 7y + 2z = 3$.

a) Calculeu l'equació paramètrica de r **(0,6 punts)** i l'equació implícita del pla π **(0,4 punts).**

b) Calculeu el punt P intersecció de r i π **(0,8 punts)** i l'angle α que determinen r i π **(0,5 punts).**

c) Calculeu els punts M i N de la recta r la distància al pla π dels quals és igual a 3 u.l. **(1 punt).**

Solució.-

a) L'equació paramètrica de r l'obtenim del sistema $\left.\begin{matrix} x + y + z = 15 \\ 2x - 7y + 2z = 3 \end{matrix}\right\} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \left.\begin{matrix} x + y + z = 15 \\ -9y \quad = -27 \end{matrix}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{matrix} x + y + z = 15 \\ y \quad = 3 \end{matrix}\right\} \to \begin{cases} x = 12 - \lambda \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}.$$

Dos vectors del pla π són :

$$\begin{cases} (5,7,5) - (11,1,2) = \overrightarrow{(-6,6,3)} \text{ que simplificat queda } \overrightarrow{(-2,2,1)} \\ (7,-1,-2) - (11,1,2) = \overrightarrow{(-4,-2,-4)} \text{ que simplificat queda } \overrightarrow{(2,1,2)} \end{cases}$$

Per tant l'equació implícita de π: $\begin{vmatrix} x - 11 & y - 1 & z - 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \leftrightarrow \ x + 2y - 2z - 9 = 0$

b) Substituim les equacions paramètriques de r en l'equació implícita de π:

$$12 - \lambda + 6 - 2\lambda - 9 = 0 \ \leftrightarrow \ \lambda = 3$$

Aleshores, les coordenades del punt P (9, 3, 3).

L'angle α que formen r i π és el complementari de l'angle que forma r amb el vector normal a π. Aleshores:

$$\alpha = \text{arc sin} \frac{\overline{(1,2,-2)}\overline{(-1,0,1)}}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \text{arc sin}\frac{-1}{\sqrt{2}} \ \leftrightarrow \ \alpha = -45º\text{, o bé en valor absolut } |\alpha| = 45º$$

c) La distancia d'un punt de la recta r al pla π és: $\dfrac{|12 - \lambda + 6 - 2\lambda - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \dfrac{|9 - 3\lambda|}{3} = |3 - \lambda|$.

Igualant a 3: $|3 - \lambda| = 3 \to 3 - \lambda = \pm 3 \to \begin{cases} \lambda_1 = 0 \to \text{punt } M(12,3,0) \\ \lambda_2 = 6 \to \text{punt } N(6,3,6) \end{cases}$

PROBLEMA 3.

a) Obteniu la derivada de la funció $f(x) = ax + b + \sin x$ **(0,5 punts)**. **Calculeu** a i b si $O = (0, 0)$ és un punt de la corba $y = ax + b + \sin x$, la recta tangent de la qual en $O = (0, 0)$ és l'eix OX **(1,8 punts).**

b) Justifiqueu que la funció $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \sin x$ s'anul·la en dos punts de l'interval $[0, \pi]$ **(0,5 punts).**

c) Calculeu aquests dos punts **(0,5 punts).**

Solució.-

a) $f'(x) = a + \cos x$.

Per ser O(0, 0) un punt de la corba, serà $f(0) = 0 \leftrightarrow b = 0$

El pendent de la tangent és zero $\leftrightarrow f'(0) = a + 1 = 0 \leftrightarrow a = -1$.

b) La funció g(x) és contínua en l'interval $[0, \pi]$ i compleix que $g(0) = 0$ i $g(\pi) = -2$. Ja hem trobat un punt on g s'anul·la. Agafem ara un punt interior a l'interval, per exemple $\frac{\pi}{6}$, en el qual es compleix que $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2}{6} + \frac{1}{2} > 0$. Aleshores, pel teorema de Bolzà, existeix un punt de l'interval $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$ on la funció g s'anul·la.

c) Ja hem vist que $g(0) = 0$; l'altre punt x que anul·le a g verificarà $\sin x = \frac{2}{\pi}x$. S'observa que aquesta equació es compleix per a $x = \frac{\pi}{2}$, és a dir $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

PROBLEMA 4.

Dos pals de $3\ m$ i $4\ m$ es troben clavats verticalment a terra. Les bases disten $5\ m$ i, en el segment que les uneix, hi ha un punt P que dista x metres de la base del pal més baix. L'extrem superior de cada pal s'uneix amb P mitjançant un segment rectilini de cable. Es demana:

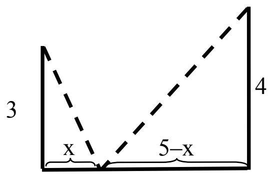
a) Obteniu l'expressió $f(x)$ de la longitud total de cable utilitzat en els dos segments **(1,8 punts).**

b) Demostreu que aquesta longitud total de cable és mínima quan són iguals els valors absoluts dels pendents dels dos segments considerats (**1 punt**). **Calculeu** aquesta longitud mínima **(0,5 punts).**

Solució.-

a) Pel teorema de Pitàgores:

$$f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{16 + (5 - x)^2}$$



b) Calcularem la primera i la segona derivada de f(x):

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}} - \frac{5 - x}{\sqrt{16 + (5 - x)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9 + x^2}}}{9 + x^2} - \frac{-\sqrt{16 + (5 - x)^2} + \frac{(5 - x)^2}{\sqrt{16 + (5 - x)^2}}}{16 + (5 - x)^2} = \frac{9}{(9 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{16}{(16 + (5 - x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

D'altra banda, per ser el valor absolut dels pendents iguals, es compleix: $\frac{3}{x} = \frac{4}{5 - x} \rightarrow$ $\rightarrow x = \frac{15}{7}$.

$$\text{Calculem } f'\left(\frac{15}{7}\right) = \frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9 + \frac{225}{49}}} - \frac{5 - \frac{15}{7}}{\sqrt{16 + \left(5 - \frac{15}{7}\right)^2}} = \frac{15}{\sqrt{666}} - \frac{20}{\sqrt{1184}} = \frac{5}{\sqrt{74}} - \frac{5}{\sqrt{74}} = 0.$$

Com $f''(x) > 0, \forall x$, resulta que f agafa un mínim relatiu per al valor $\frac{15}{7}$, que és absolut en l'interval [0, 5].

Aleshores la longitud mínima seria :

$$f\left(\frac{15}{7}\right) = \sqrt{9 + \frac{225}{49}} + \sqrt{16 + \left(5 - \frac{15}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{666}}{7} + \frac{\sqrt{1184}}{7} = \sqrt{74}\ \text{m.}$$