



**SELECTIVIDAD SEPTIEMBRE 2004**  
**MATEMÀTIQUES II**

**EJERCICIO A**

**PROBLEMA 1.** Obtener todos los valores reales  $x, y, z, t$  para los que se verifica  $AX = XA$ , siendo  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  y  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

**Solución:**

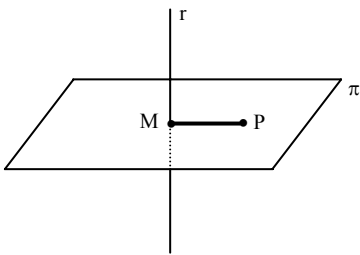
a) Si  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2z = x + 3y \\ y + 2z = 2x + 4y \\ 3x + 4z = z + 3t \\ 3y + 4t = 2z + 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ x + z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z - t = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$  cuya solución es :  $\left. \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \frac{2}{3}\lambda \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \right\} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

**PROBLEMA 2.**

- a) Obtener el plano que pasa por el punto  $P(-2, 4, -3)$  y es perpendicular a la recta  $r$ :  
 $(x, y, z) = (1, 2, 0) + t(1, -2, 1)$ .
- b) Calcular la distancia entre el punto  $P$  y la recta  $r$ .

**Solución:**



a) Para hallar el plano  $\pi$  necesitamos un punto de él,  $P$ , y un vector normal al plano  $\Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (1, -2, 1) \Rightarrow x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow$  Como  $P \in \pi \Rightarrow -2 - 8 - 3 + D = 0 \Rightarrow D = 13 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x - 2y + z + 13 = 0}$ .

b) Para hallar la distancia de  $P$  a  $r$ , como tenemos la ecuación del plano  $\pi$ , podemos hallar el punto  $M = r \cap \pi$  y la distancia pedida  $d(P, r) = d(P, M)$ .

$r \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow M(1+t, 2-2t, t) \Rightarrow 1+t - 2(2-2t) + t + 13 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -\frac{5}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow M\left(-\frac{2}{3}, \frac{16}{3}, -\frac{5}{3}\right) \Rightarrow d(P, M) = \sqrt{\left(-\frac{2}{3} + 2\right)^2 + \left(\frac{16}{3} - 4\right)^2 + \left(-\frac{5}{3} + 3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} =$   
 $= \sqrt{3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \boxed{\frac{4}{3}\sqrt{3}}$ .

También se podría haber calculado la  $d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \wedge \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|} = \frac{|(3, -2, 3) \wedge (1, -2, 1)|}{|(1, -2, 1)|} = \frac{|(4, 0, -4)|}{|(1, -2, 1)|} =$   
 $= \frac{\sqrt{2 \cdot 4^2}}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$ .



**PROBLEMA 3.** Sea  $f(x) = x^2 + mx$  (donde  $m$  es un parámetro real) y  $f'(x)$  la función derivada de  $f(x)$ . Se pide:

- a) Hallar el valor del parámetro  $m$  para que  $f(x)$  tenga un mínimo relativo en  $x = -3/4$ .  
 b) Para el valor de  $m$  calculado en a), determinar el área de la región comprendida entre la curva  $y = f(x)$  y la recta de ecuación  $y = f'(x)$ .

**Solución:**

a) Para que  $f$  tenga un mínimo relativo en  $x = -3/4$ , es condición necesaria que  $f'(-3/4) = 0 \Rightarrow$

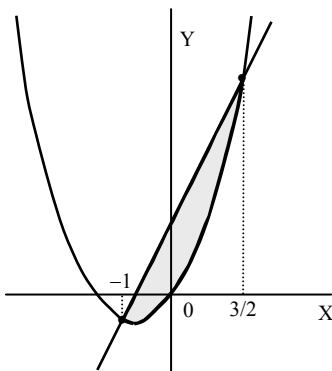
$$\Rightarrow f'(x) = 2x + m \Rightarrow f'(-3/4) = -\frac{3}{2} + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = \frac{3}{2}}$$

b) Si  $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{3}{2} \Rightarrow$  la recta es:  $y = 2x + \frac{3}{2}$ , y  $f(x)$  es la parábola  $y = x^2 + \frac{3}{2}x$ .

Hallamos sus puntos de corte y dibujamos ambas curvas:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 + \frac{3}{2}x \\ y = 2x + \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2} \Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{3}{2}; x = -1.$$



$$\text{Área} = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left( 2x + \frac{3}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} \right]_{-1}^{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{125}{48}} u^2.$$

**PROBLEMA 4.1.** a) Se tienen inicialmente 10 bacterias en un cultivo de laboratorio y cada día se duplican. Averigua, razonadamente, el número de bacterias que habrá cuando haya transcurrido 10 días. b) Para otro cultivo, sea  $P(t)$  el número de bacterias transcurrido el tiempo  $t$  medido en días. Averigua el aumento del número de bacterias al cabo de 10 días, sabiendo que  $P(0) = 500$ ,  $P(3) = 1100$  y que la derivada  $P'(t)$  es constante para  $0 \leq t \leq 10$ .

**Solución:**

a) Si cada día se duplican  $\Rightarrow$  transcurrido un día habrá:  $2 \cdot 10$ ; transcurridos dos días habrá:  $2 \cdot 2 \cdot 10 = 2^2 \cdot 10$ ; transcurridos 3 días habrá:  $2^3 \cdot 10$ ; ....., transcurridos 10 días habrá:  $\boxed{2^{10} \cdot 10}$ .

b) Por el teorema del Valor Medio, el aumento del número de bacterias en 10 días  $= \Delta P = P(10) - P(0) = P'(t_1) \cdot (10 - 0)$  con  $t_1 \in ]0, 10[$ , pero también:  $P(3) - P(0) = P'(t_2) \cdot (3 - 0)$  con  $t_2 \in ]0, 3[ \Rightarrow 1100 - 500 = P'(t_2) \cdot 3 \Rightarrow P'(t_2) = 200$ , y como  $P'(t)$  es cte en el intervalo  $[0, 10] \Rightarrow P'(t_1) = P'(t_2) = 200 \Rightarrow \Delta P = P(10) - P(0) = \boxed{2000}$ .

**PROBLEMA 4.2.** Durante 6 años consecutivos, la producción industrial  $x$  de una empresa, medida en toneladas métricas, fue: 110, 125, 130, 140, 150 y 155, mientras que las compras efectuadas, expresadas en millones de euros, fueron: 30, 41, 43, 47, 50 y 55.

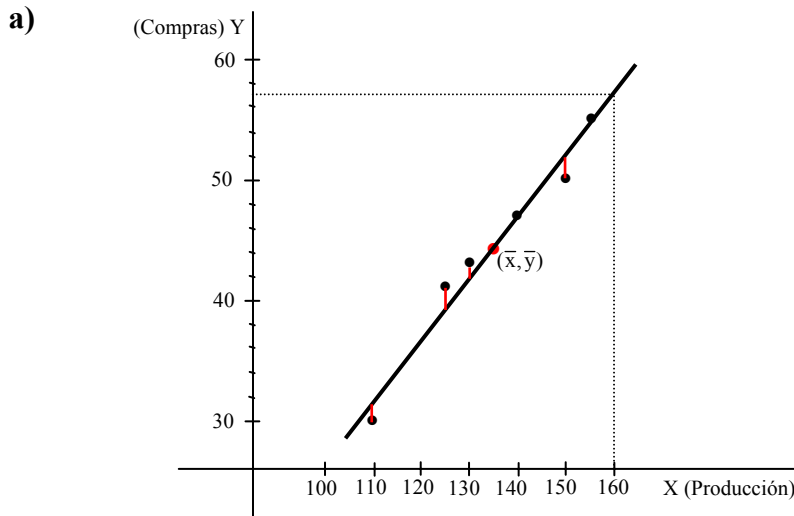
a) Representar los 6 puntos  $(x, y)$  (es decir, (110, 30), (125, 41), (130, 43), (140, 47), (150, 50) y (155, 55)) en unos ejes OXY y dibujar aproximadamente la recta de regresión de  $y$  sobre  $x$ . Sobre esta recta, obtener ahora gráficamente la predicción de compras a efectuar para una producción industrial de 160 millones de euros.

b) Explicar cómo se ha hecho el dibujo de la recta y la predicción.

c) Razonar si se puede predecir o no las compras para una producción de 400 millones de euros.



**Solució:**



$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{810}{6} = 135$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i f_i}{\sum f_i} = \frac{266}{6} = 44,33$$

Si  $x = 160 \Rightarrow \boxed{y \approx 57}$

- b) La recta de regresió sempre passa per el punt  $(\bar{x}, \bar{y})$ , que en este cas és el punt  $\approx (135, 44,33)$ . Després se ha dibuixat la recta que passant per dit punt faci mínima (de manera aproximada) les sumes dels quadrats de les desviacions dels punts de la núvol respecte de ella, que són els segments colorejats en vermell. La predicció s'ha fet observant que en dita recta de regresió el valor de  $y$  que li correspon al valor de  $x = 160$  és  $\approx 57$ .
- c) Com el valor  $x = 400$  queda molt allunyat dels punts amb els quals s'ha obtingut la recta de regresió, no és raonable fer prediccions per dit valor.

**EJERCICIO B**

**PROBLEMA 1.** Para las matrices reales:  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$   $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , se pide:

- a) Justificar que existe la matriz  $A^{-1}$ , inversa de  $A$ , y calcular el determinante de  $A^{-1}$ .  
 b) Calcular la matriz  $B = A(A + 4I)$ .  
 c) Determinar los valores reales  $x, y, z, t$  que cumplen:  $A^{-1} = xA + yI$ ,  $A^2 = zA + tI$ .

**Solució:**

a) Calculamos  $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$  y  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \boxed{-\frac{1}{8}}$ .

b)  $B = A(A + 4I) = A^2 + 4A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ -12 & 16 & -24 \\ -4 & 4 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -4 & 8 \\ 12 & -20 & 24 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \boxed{-4I}$

c) Si  $A^2 + 4A = -4I \Rightarrow A^2 = -4A - 4I \Rightarrow \boxed{z = -4, t = -4}$ .

Però ademés,  $-\frac{1}{4}(A^2 + 4A) = I \Rightarrow -\frac{1}{4}(A + 4I)A = I$  y por definición de inversa:  $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A + 4I) = -\frac{1}{4}A - I \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{4}, y = -1}$ .



**PROBLEMA 2.** Consideremos los puntos:  $A = (1,0,0)$ ,  $B = (0,1,0)$ ,  $C = (0,0,1)$  y  $D = (2,1,2)$ .

Se pide:

- Hallar el área del triángulo de vértices B, C y D.
- Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
- Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por los puntos B, C y D.

**Solución:**

a) El Área =  $\frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3 \cdot 2^2} = \boxed{\sqrt{3}} \text{ u}^2$ .

b) El Volumen  $\frac{1}{6} |[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \left| \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-4| = \boxed{\frac{2}{3}} \text{ u}^3$ .

c) La distancia del punto A al plano  $\pi_{BCD}$  coincide con la altura del tetraedro  $\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \sqrt{3} \cdot h \Rightarrow h = \frac{12}{3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{4\sqrt{3}}{3}} \text{ u}$ .

**PROBLEMA 3.** a) Obtener razonadamente la siguiente integral  $\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx$ .

b) Aplicando la regla de Barrow, calcular  $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx$ .

**Solución:**

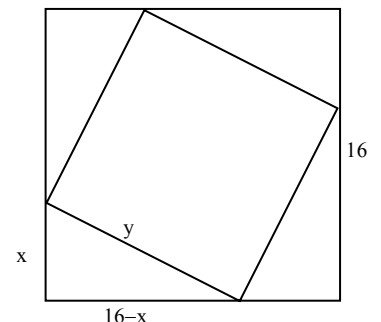
a)  $\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx = \int \frac{4x+11}{x^2+2x+2} dx = 2 \int \frac{2x+11/2}{x^2+2x+2} dx = 2 \int \frac{2x+2+11/2-2}{x^2+2x+2} dx =$   
 $= 2 \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx + 2 \int \frac{11/2-2}{(x+1)^2+1} dx = 2 \cdot \ln |x^2+2x+2| + 7 \int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx =$   
 $= \boxed{2 \cdot \ln |x^2+2x+2| + 7 \cdot \text{arc tg}(x+1) + C}$ .

b)  $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1} dx = [2 \cdot \ln |x^2+2x+2| + 7 \cdot \text{arctg}(x+1)]_0^{\sqrt{3}-1} = 2 \cdot \ln |(\sqrt{3}-1+1)^2+1| + 7 \cdot \text{arctg}(\sqrt{3}-1+1)$   
 $- 2 \cdot \ln |1^2+1| - 7 \cdot \text{arctg} 1 = 2 \cdot \ln 4 + 7 \cdot \text{arctg} \sqrt{3} - 2 \cdot \ln 2 - 7 \cdot \text{arctg} 1 = 4 \cdot \ln 2 + 7 \cdot \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \ln 2 - 7 \cdot \frac{\pi}{4} =$   
 $= \boxed{2 \cdot \ln 2 + \frac{7\pi}{12}}$ .

**PROBLEMA 4.1.** Determinar razonadamente la longitud del lado del cuadrado de área mínima cuyos vértices están situados sobre los lados de otro cuadrado de lado 16 cm.

**Solución:**

El área del cuadrado es:  $y^2 = 2x^2 - 32x + 256 = A(x)$  ya que por el teorema de Pitágoras:  $y^2 = x^2 + (16-x)^2 = 2x^2 - 32x + 256$ .





Para obtener el área mínima hemos de imponer que  $A'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 32 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 8} \Rightarrow y = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$ .

Como  $A''(8) = 4 > 0 \Rightarrow$  para dicho valor se obtiene el área mínima.

**PROBLEMA 4.2.** Una urna contiene 6 bolas blancas y 4 bolas negras. Se repite tres veces la siguiente operación: extraer una bola al azar, anotar su color y devolverla a la urna. Determinar la probabilidad de extraer más de una bola negra. Explicar en qué se fundamenta la probabilidad obtenida.

**Solución:**

Se trata de una binomial  $Bi(3; p)$  siendo  $p = P(N) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$  y  $q = 1 - p = \frac{3}{5} \Rightarrow$  Si  $X =$  número de bolas negras obtenidas en las tres extracciones, la probabilidad pedida es:

$$P(X > 1) = P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} + \binom{3}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \boxed{\frac{44}{125} = 0,352}.$$