



SELECTIVIDAD SEPTIEMBRE 2003

MATEMÀTIQUES II

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Considerar las matrices: $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) ¿Para qué valores reales de m es A inversible?. Calcular la matriz A^{-1} .
 b) En la anterior matriz A con $m = 0$, obtener la matriz real cuadrada X de orden 3 que satisface la igualdad $B - AX = AB$.

Solución:

a) A será inversible para aquellos valores de m que hagan $|A| \neq 0$.

Calculamos: $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -(m+1) \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3$. Resolvemos la ecuación: $m^2 - 4m + 3 = 0$

$\Rightarrow m = 3$ y $m = 1$.

Por tanto A será inversible si $m \neq 3$ y $m \neq 1$ $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t) =$

$$= \frac{1}{(m-3)(m-1)} \text{Adj} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ m & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -(m+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{(m-3)(m-1)} \begin{pmatrix} 1 & m^2 + m + 3 & -m \\ m-4 & -15 & 3 \\ 1 & 5m & -m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{(m-3)(m-1)} & \frac{m^2 + m + 3}{(m-3)(m-1)} & \frac{-m}{(m-3)(m-1)} \\ \frac{m-4}{(m-3)(m-1)} & \frac{-15}{(m-3)(m-1)} & \frac{3}{(m-3)(m-1)} \\ \frac{1}{(m-3)(m-1)} & \frac{5m}{(m-3)(m-1)} & \frac{-m}{(m-3)(m-1)} \end{pmatrix}.$$

b) Si $B - AX = AB \Rightarrow AX = B - AB \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - AB) = A^{-1} \cdot (I - A) \cdot B$.

Si $m = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, \Rightarrow

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & -15 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 0 \\ -6 & -4/3 & 1 \\ 0 & 1/3 & -1 \end{pmatrix}.$$

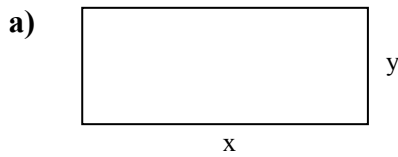
PROBLEMA 2. En una gran pradera se tiene que vallar una zona de 400 m^2 , que debe tener forma de rectángulo. Cada metro de valla cuesta 100 euros. Si x es la medida en metros de uno de sus lados, se pide:

- a) Obtener razonadamente la función f tal que $f(x)$ sea el coste de la valla, indicando entre qué valores puede variar x .



b) Deducir razonadamente el valor de x para el que la función $f(x)$ alcanza el valor mínimo.

Solución:



Como el área del rectángulo es: $x \cdot y = 400 \Rightarrow$

$$y = \frac{400}{x}$$

La función f que da el coste de la valla será el perímetro del rectángulo por 100 \Rightarrow

$$\Rightarrow f(x) = (2x + 2y)100 = (2x + 2 \cdot \frac{400}{x})100 = \boxed{200x + \frac{80000}{x}}, \text{ con } x \in]0, +\infty[.$$

b) Para hallar dónde la función f alcanza el valor mínimo, calculemos sus extremos relativos, para lo cual resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 200 - \frac{80000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{400} = \pm 20. \text{ Descartamos } -20 \notin]0, +\infty[.$$

Calculamos $f''(x) = \frac{160000}{x^3} \Rightarrow f''(20) > 0 \Rightarrow$ para $\boxed{x = 20}$ la función alcanza el valor mínimo.

PROBLEMA 3. Las notas de Filosofía y de Literatura de los 7 alumnos de una clase, listadas por columnas, son:

Filosofía	3	6	7	5	8	4	8
Literatura	5	8	7	7	9	5	5

- a) Calcular el valor medio y la desviación típica de las notas de Filosofía y de las notas de Literatura.
- b) Obtener el coeficiente de correlación entre las notas de Filosofía y de Literatura, explicando su significado.
- c) Al prescindir de la última columna el coeficiente de correlación es 0,9. Explicar detalladamente por qué es mayor que el obtenido en el apartado b).

Solución:

a)

Filosofía	Literatura			
x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i \cdot y_i$
3	5	9	25	15
6	8	36	64	48
7	7	49	49	49
5	7	25	49	35
8	9	64	81	72
4	5	16	25	20
8	5	64	25	40
$\Sigma x_i = 41$	$\Sigma y_i = 46$	$\Sigma x_i^2 = 263$	$\Sigma y_i^2 = 318$	$\Sigma x_i \cdot y_i = 279$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{N} = \frac{41}{7} = \boxed{5,86}; \quad \sigma_x^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{263}{7} - 5,86^2 = 3,2658 \Rightarrow \sigma_x = \boxed{1,807}$$

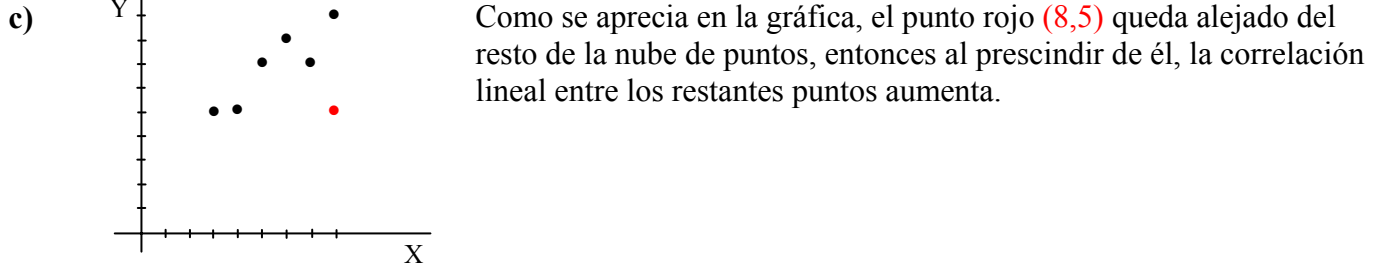
$$\bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{N} = \frac{46}{7} = \boxed{6,57}; \quad \sigma_y^2 = \frac{\Sigma y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = \frac{318}{7} - 6,57^2 = 2,2449 \Rightarrow \sigma_y = \boxed{1,498}$$



b)

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{N} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{279}{7} - 5,86 \cdot 6,57 = 1,3569 \Rightarrow r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{1,3569}{1,807 \cdot 1,498} = \boxed{0,501}$$

\(\Rightarrow\) la correlación lineal entre las dos variables es positiva y débil ya que no es un valor próximo a 1.



PROBLEMA 4. En el espacio \mathbb{R}^3 , se consideran el punto $P = (3,2,3)$ y la recta r intersección de los planos de ecuaciones: $x + 3y - 4z = 0$ y $x + 2y - 2z = 1$. Se pide determinar:

- a) La distancia d del punto P a la recta r .
- b) Los puntos M y N de la recta r que cumplan que su distancia al punto P es $\sqrt{5}d$.
- c) El área del triángulo de vértices P , M y N .

Solución:

a) La distancia pedida viene dada por: $d = \frac{|\overrightarrow{PP_r} \wedge \vec{v}_r|}{|\vec{v}_r|}$.

Como $r \equiv \begin{cases} x + 3y - 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(2,-2,-1)}$ y $P_r = (3,-1,0) \Rightarrow \overrightarrow{PP_r} = (0,-3,-3)$;

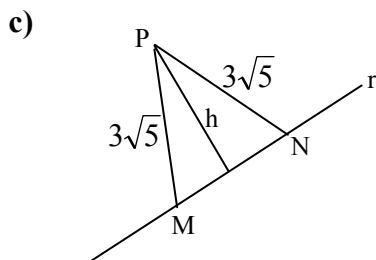
$$\overrightarrow{PP_r} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & -3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-3,-6,6)} \Rightarrow |\overrightarrow{PP_r} \wedge \vec{v}_r| = 9; |\vec{v}_r| = 3$$

\(\Rightarrow\) $d = 3$.

b) Si expresamos la recta r en forma paramétrica $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow$ cualquier punto de la recta será

de la forma $M(3 + 2\lambda, -1 - 2\lambda, -\lambda) \Rightarrow$ la $d(M,P) = \sqrt{(3 + 2\lambda - 3)^2 + (-1 - 2\lambda - 2)^2 + (-\lambda - 3)^2} = \sqrt{9\lambda^2 + 18\lambda + 18} = \sqrt{9(\lambda^2 + 2\lambda + 2)} = 3\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 2}$; igualando:

$$3\sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 2} = 3\sqrt{5} \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 5 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \text{ y } \lambda = -3 \Rightarrow \boxed{M=(5,-3,-1)} \text{ y } \boxed{N=(-3,5,3)}$$



Como el triángulo es isósceles, tomando como base:

$$d(M,N) = |\overrightarrow{MN}| = |(-8,8,4)| = 12 \Rightarrow \text{por Pitágoras:}$$

$$h = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 6^2} = \sqrt{45 - 36} = 3 \Rightarrow \text{Área} = \frac{12 \cdot 3}{2} = \boxed{18} \text{ u}^2.$$



EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Se consideran las matrices cuadradas reales de orden 2, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcular: **a)** La matriz P^{-1} . **b)** La matriz real cuadrada X de orden 2, tal que $P^{-1}XP = Q$. **c)** La matriz $(PQP^{-1})^2$.

Solución:

$$\text{a) Calculamos } |P| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists P^{-1} = \frac{1}{|P|} \cdot \text{Adj}(P^t) = \frac{1}{-1} \cdot \text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

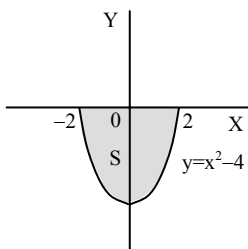
b) Si $P^{-1}XP = Q$, multiplicando a la izquierda por P , y a la derecha por P^{-1} : $PP^{-1}XP^{-1} = PQP^{-1} \Rightarrow$

$$X = PQP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } (PQP^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -10 \\ 30 & -11 \end{bmatrix}$$

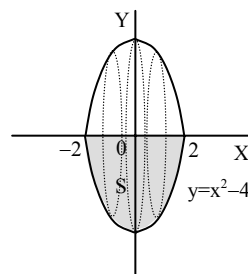
PROBLEMA 2. **a)** Representar la superficie S limitada entre el eje OX y la curva $y = x^2 - 4$, cuando $-2 \leq x \leq 2$. Obtener, razonadamente, mediante una integral el área de la superficie S . **b)** Hallar el volumen del cuerpo generado al dar un giro completo alrededor del eje OX la superficie S considerada en el apartado anterior, indicando cómo se ha obtenido el volumen.

Solución:



a) Como la superficie S limitada por la parábola y el eje OX queda por debajo de dicho eje, la integral definida nos dará el área negativa \Rightarrow para que nos de positiva, pondremos un "-" delante, y como la superficie tiene simetría respecto del eje OY :

$$S = -2 \int_0^2 (x^2 - 4) \cdot dx = -2 \cdot \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_0^2 = \frac{32}{3} \text{ u}^2.$$



b) El volumen de un cuerpo de revolución generado al girar alrededor del eje OX una superficie plana limitada por una curva $y = f(x)$ y el eje OX viene dada

$$\text{por: } V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx \Rightarrow \text{por la simetría citada anteriormente el volumen pedido}$$

$$\text{será: } V = 2\pi \int_0^2 (x^2 - 4)^2 \cdot dx = 2\pi \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) \cdot dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} - 8 \frac{x^3}{3} + 16x \right]_0^2 =$$

$$\frac{512}{15} \pi \text{ u}^3.$$

PROBLEMA 3. El peso medio de un grupo de 500 estudiantes es 68,5 kilos y la desviación típica, 10 kilos.



Suponiendo que los pesos siguen una distribución normal, se pide:

- ¿Cuántos estudiantes pesan entre 48 y 71 kilos?
- ¿Cuántos estudiantes pesan más de 91 kilos?
- Se eligen 5 alumnos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 de ellos pesen más de 75 kilos?

Solución:

a) Si tenemos una distribución normal de media $\mu = 68,5$ y $\sigma = 10 \Rightarrow P(48 < X < 71) =$
 $P\left(\frac{48 - 68,5}{10} < Z < \frac{71 - 68,5}{10}\right) = P(-2,05 < Z < 0,25) = P(Z < 0,25) - P(Z > 2,05) = P(Z < 0,25) - 1 + P(Z < 2,05) = 0,5987 - 1 + 0,9798 = 0,5787 \Rightarrow$ de 500 estudiantes habrán: $500 \cdot 0,5787 = 289,35 \approx$ 289 estudiantes.

b) La $P(X > 91) = P\left(Z > \frac{91 - 68,5}{10}\right) = P(Z > 2,25) = 1 - P(Z < 2,25) = 1 - 0,9878 = 0,0122 \Rightarrow$ de 500 estudiantes habrán: $500 \cdot 0,0122 = 6,1 \approx$ 6 estudiantes.

c) Si se eligen 5 alumnos al azar, estamos ante una binomial con $n = 5$, $p = P(\text{un alumno pese más de 75 kilos}) = P(X > 75) = P\left(Z > \frac{75 - 68,5}{10}\right) = P(Z > 0,65) =$
 $= 1 - P(Z < 0,65) = 1 - 0,7422 = 0,2578$, y $q = 1 - p = 1 - 0,2578 = 0,7422 \Rightarrow$
 $P(X' = 2) = \binom{5}{2} \cdot p^2 \cdot q^3 = 10 \cdot (0,2578)^2 \cdot (0,7422)^3 =$ 0,2717.

PROBLEMA 4. Sean π y π' los planos del espacio \mathbb{R}^3 , determinados del modo siguiente:

El plano π pasa por los puntos $(0,2,1)$, $(3,-1,1)$ y $(1,-1,5)$ y el plano π' pasa por los puntos $(3,0,2)$, $(2,1,1)$ y $(5,4,-2)$. Se pide calcular:

- Una ecuación paramétrica de la recta r intersección de los planos π y π' .
- El ángulo α que forman los planos π y π' .
- La ecuación del plano que contiene a la recta r y forma un ángulo de 90 grados con el plano π .

Solución:

a) $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + 2y + z - 5 = 0;$

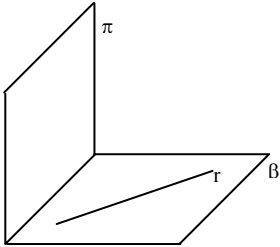
$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-0 & z-2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv y + z - 2 = 0; \Rightarrow$ la recta r en forma implícita es: r

$\equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ y + z = 2 \end{cases}$, resolviendo el sistema obtenemos la forma paramétrica de r :

$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$.



$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\pi \cdot \vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_\pi| |\vec{n}_{\pi'}|} = \frac{|(2,2,1) \cdot (0,1,1)|}{|(2,2,1)| |(0,1,1)|} = \frac{3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 45^\circ}.$$



c) $\left. \begin{array}{l} \text{Si } r \subset \beta \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\beta \\ \text{Si } \pi \perp \beta \Rightarrow \vec{n}_\pi \perp \vec{n}_\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \text{El vector normal del plano } \alpha \text{ es:}$

$$\vec{n}_\beta = \vec{v}_r \wedge \vec{n}_\pi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(-6, 3, 6)} \parallel \overrightarrow{(2, -1, -2)} \Rightarrow$$

$$\beta \equiv 2x - y - 2z + D = 0; \text{ pero como el punto } P_r(0, 3, -1) \in \beta \Rightarrow 0 - 3 + 2 + D = 0$$

$$\Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\beta \equiv 2x - y - 2z + 1 = 0}.$$