PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD. MATEMÁTICAS II (OPCIÓN CIENCIAS DE LA NATURALEZA). SEPTIEMBRE 2002

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dadas las matrices reales:

$$A=\begin{pmatrix}5&8\\9&4\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\\1&4\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}3&7\\1&2\end{pmatrix},$$

Se pide

i) Calcular la matriz $M = A - 2BC$.

ii) Justificar que existe la matriz D^{-1} inversa de D y calcular tal matriz.

iii) Calcular las matrices X, Y que cumplen $DX = M = YD$.

Solución:

i) $$M = A - 2BC = \begin{pmatrix}5&8\\9&4\end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\\1&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&8\\9&4\end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix}-2&-3\\15&0\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}5&8\\9&4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4&-6\\30&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9&14\\-21&4\end{pmatrix}.$$

ii) Existirá D^{-1} si $\det(D) = |D| \neq 0$.

Calculamos $|D| = \begin{vmatrix}3&7\\1&2\end{vmatrix} = 6 - 7 = -1 \neq 0$ luego $\exists\, D^{-1} = \dfrac{1}{|D|}\mathrm{Adj}(D^t) =$

$$= \frac{1}{-1}\mathrm{Adj}\begin{pmatrix}3&1\\7&2\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}2&-7\\-1&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&7\\1&-3\end{pmatrix}.$$

iii) Si $DX = M \Rightarrow X = D^{-1}.M = \begin{pmatrix}-2&7\\1&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9&14\\-21&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-165&0\\72&2\end{pmatrix}.$

Si $M = YD \Rightarrow Y = M.\,D^{-1} = \begin{pmatrix}9&14\\-21&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&7\\1&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4&21\\46&-159\end{pmatrix}.$

PROBLEMA 2. Las tallas de los ciudadanos adultos de una gran ciudad siguen una distribución normal de media 1,70 y desviación típica 0,20.

a) Se selecciona al azar un ciudadano. Averigua razonadamente cuál es la probabilidad de que su talla sea superior a 1,95.

b) Se selecciona al azar otro ciudadano entre los de talla superior a 1,65. Averigua razonadamente cuál es la probabilidad de que su talla sea superior a 1,95.

Solución:

a) Si tenemos una distribución normal de media $\mu = 1{,}70$ y desviación típica $\sigma = 0{,}20$

la $P(Z > 1{,}95) = P\left(Z' > \dfrac{1{,}95 - 1{,}70}{0{,}20}\right) = P(Z' > 1{,}25) = 1 - P(Z' \leq 1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$

b) En este caso se pide una probabilidad condicionada, $P\left({}^{Z>1,95}\!\big/_{Z>1,65} \right) =$

$$= \frac{P(Z>1{,}95 \cap Z>1{,}65)}{P(Z>1{,}65)} = \frac{P(Z>1{,}95)}{P(Z>1{,}65)} = \frac{0{,}1056}{0{,}5987} = 0{,}1764$$

pues la $P(Z>1{,}65) = P\left(Z' > \frac{1{,}65-1{,}70}{0{,}20} \right) = P(Z' > -0{,}25) = P(Z' < 0{,}25) = 0{,}5987.$

PROBLEMA 3. Consideremos los planos

$$\pi_1 : \ x + y - 6 = 0$$
$$\pi_2 : \ 2x + 4y + \lambda z + 2 = 0$$

donde λ es un parámetro real. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 cuando $\lambda = 4$.

b) Calcular razonadamente λ para que los planos π_1 y π_2 se corten formando un ángulo de 45^o.

Solución:

a) La recta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ para $\lambda = 4$ en forma implícita es $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+4y+4z=-2 \end{cases}$.

Para pasarla a forma paramétrica basta con resolver el sistema (por el método de Gauss, por ejemplo) que es compatible indeterminado dependiente de un parámetro; o bien hallar un punto de dicha recta y su vector director:

Si $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow y = -7;\ x = 13 \Rightarrow P(13, -7, 0) \in r$ y

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(2,-2,1)} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 13 + 2\lambda \\ y = -7 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}.$$

b) El coseno del ángulo que forman dos planos viene dado por: $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| . |\vec{n}_2|} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 45^0 = \frac{|2+4+0|}{\sqrt{2}.\sqrt{20+\lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2.\sqrt{\lambda^2+20} = 12 \Rightarrow \lambda^2 = 16 \Rightarrow \lambda = \pm 4.$$

PROBLEMA 4. Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Hallar a, b, c sabiendo que f alcanza un máximo en $x = -4$ y un mínimo en $x = 0$ y que $f(1) = 1$.

Solución:

Por condición necesaria de extremo relativo, $f'(-4) = 0$ y $f'(0) = 0$.

Como $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow 3(-4)^2 + 2a(-4) + b = 0$ y $\mathbf{b = 0}$.

Si $f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1$, luego $a + c = 0$ y $48 - 8a = 0 \Rightarrow$ **a = 6** y **c = –6**.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ 2x+3y+5z=2 \\ 3x+5y+\lambda^2 z=1 \end{cases}$, dependiente del parámetro λ, se pide:

i) Determinar para qué valores de λ el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado e incompatible.

ii) Obtener el conjunto S de las soluciones del sistema para el caso compatible indeterminado.

iii) Obtener el vector de S ortogonal (perpendicular) al vector (1, 1, 2).

Solución:

i) $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & \lambda^2 & 1 \end{pmatrix}$ y $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & \lambda^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda^2-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \lambda^2-3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$

$|M| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 9 \Rightarrow \lambda = \pm 3.$

Si $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -3$ $\Rightarrow$ $|M| \neq 0 \Rightarrow$ rg(M) = 3 = rg(M*) = nº incógnitas , por Rouché-Frobenius $\Rightarrow$ **Comp. Determinado.**

Si $\lambda = 3$ $\Rightarrow$ $|M| = 0$ y por tanto rg(M) < 3. Calculemos el rg(M) y el rg(M*).

$M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(M) = 2 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

rg(M*) = 2 $\Rightarrow$ **Comp. Indeterminado**.

Si $\lambda = -3$ $\Rightarrow$ $|M| = 0$ y rg(M) < 3. $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ rg(M) = 2 pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ pero

rg(M*) = 3 ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow$ rg(M) ≠ rg(M*) $\Rightarrow$ **Incompatible**.

ii) El sistema es compatible indeterminado para λ = 3 y en dicho caso el menor principal era $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ el sistema inicial es equivalente al $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x+3y+5z=2 \end{cases}$, y tomando z como parámetro $\begin{cases} x+y=3-z \\ 2x+3y=2-5z \end{cases}$ y aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 2-5z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9-3z-2+5z}{3-2} = 7+2z \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 2 & 2-5z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2-5z-6+2z}{3-2} = -4-3z$$

luego el conjunto de las soluciones del sistema es $S = \{(7+2z, -4-3z, z) , \forall z \in \Re\}$

iii) Sea v un vector de S $\Rightarrow$ v = (5+2z, −4−3z, z) y como ha de ser ortogonal a (1,1,2) $\Rightarrow$ su producto escalar ha de ser cero: (7+2z, −4−3z, z)·(1,1,2) = 0 $\Rightarrow$ 1.(7+2z) + 1.(−4−3z) + 2z = = 0 $\Rightarrow$ z = −3. Por tanto el vector de S pedido es v = (1, 5, −3).

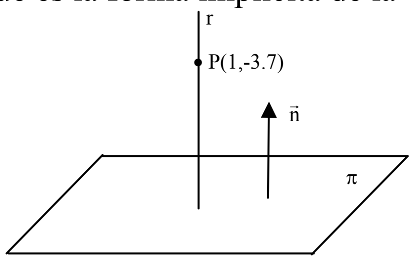
PROBLEMA 2. Dado el plano definido por la ecuación $\pi : 8x - 4y + z = 3$, hallar:
a)La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P(1, −3, 7), expresada como intersección de dos planos.
b)La distancia del punto P al plano π.
c)Las ecuaciones de los planos que distan 3 unidades del plano π.

Solución:

a) El vector normal del plano π: $\vec{n} = \overrightarrow{(8,-4,1)} = \vec{v}_r$ es también vector director de la recta pedida ya que es perpendicular al plano y como nos dan un punto de ella, la recta r en forma continua es:

$$r \equiv \frac{x-1}{8} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-7}{1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+3}{-4} \\ \dfrac{x-1}{8} = \dfrac{z-7}{1} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=-5 \\ x-8z=-55 \end{array}\right\}$$

que es la forma implícita de la recta, es decir, como intersección de dos planos.



b) La distancia del punto P al plano π es:

$$d(P, \pi) = \frac{|8.1 - 4.(-3) + 7 - 3|}{\sqrt{8^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{24}{\sqrt{81}} = \frac{8}{3}.$$

c) Cualquier plano paralelo al plano π tendrá su mismo vector normal, luego los planos pedidos tendrán de ecuación $8x - 4y + z + D = 0$. Tomando un punto cualquiera del plano π, por ejemplo: x = 0, y = 0 $\Rightarrow$ x = 3 $\Rightarrow$ el punto Q(3, 0, 0) $\in \pi$ y la distancia del punto Q a los planos pedidos tiene que ser 3:

$$\frac{|8.3 - 4.0 + 0 + D|}{\sqrt{64+16+1}} = 3 \Rightarrow \frac{|24 + D|}{9} = 3 \Rightarrow |24 + D| = 27 \Rightarrow 24 + D = \pm 27 \Rightarrow D = 3 \text{ y } D =$$

= −51. Los planos pedidos son: $8x - 4y + z + 3 = 0$; $8x - 4y + z - 51 = 0$.

PROBLEMA 3. Un agente comercial consigue, por término medio, vender sus productos al 40% de los clientes que visita. Selecciona al azar cinco de sus clientes para visitarlos cierto día. Averigua razonadamente:
a) La probabilidad de que no venda sus productos a ninguno de esos cinco clientes.
b) La probabilidad de que venda sus productos sólo a dos de esos cinco clientes.
c) La probabilidad de que venda sus productos sólo a cuatro de esos cinco clientes.

Solución:

Se trata de una Binomial con n = 5 y p = 0,4 $\Rightarrow$ q = 1 − 0,4 = 0,6

a) La $p(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot p^0 \cdot q^5 = 1.1.(0,6)^5 = 0,0777$.

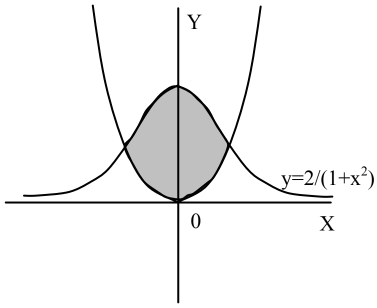
b) La $p(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot p^2 \cdot q^3 = 10.(0,4)^2.(0,6)^3 = 0,3456$.

c) La $p(X = 4) = \binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot q^1 = 5.(0,4)^4.0,6 = 0,0768.$

PROBLEMA 4. Calcular, razonadamente, el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{2}{1+x^2}$.

Solución:

Las gráficas de las curvas dadas son:



Para calcular el área de la región limitada por ellas necesitamos calcular las abscisas de los puntos de corte de ambas:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \dfrac{2}{1+x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = \frac{2}{1+x^2};\; x^4 + x^2 - 2 = 0;$$

$x^2 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow x^2 = -2$ y $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ ya que el otro caso no es posible.

El área $A = \int_{-1}^{1}\left(\dfrac{2}{1+x^2} - x^2\right).dx = 2\int_{0}^{1}\left(\dfrac{2}{1+x^2} - x^2\right).dx = 2.\left[2.\text{arctg}x - \dfrac{x^3}{3}\right]_0^1 =$

$= 2\left(2.\text{arctg}1 - \dfrac{1}{3}\right) = 2.\left(2.\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{3}\right) = \pi - \dfrac{2}{3}.$