PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT. SETEMBRE 2001

EXERCICI A

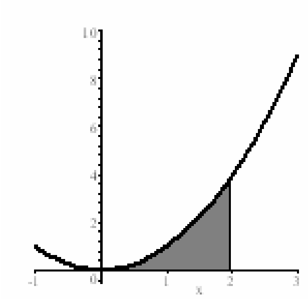
PROBLEMA 1. Siga r_1 la recta que passa pels punts A = (0,0,0) i B = (80, 10, 0) i siga r_2 la recta que passa per C = (0, 0, 10) i D = (m, 10, 10). Obteniu la distància entre r_1 i r_2. Justifiqueu geomètricament que la distància entre r_1 i r_2 és independent del valor de m.

Solució.-

La recta r_1 està en el pla z = 0 i la recta r_2 està en el pla z = 10 (que són plans paral·lels). A més a més, ambdues rectes tallen (perpendicularment) a l'eix OZ en els punts A i C respectivament. Aleshores la distància és 10, independentment del valor de m.

PROBLEMA 2. Obteniu l'àrea de la superfície S limitada per l'eix OX, la corba $y = x^2$, amb $0 \le x \le 2$, i la recta x = 2.
Calculeu el volum generat per la superfície S en donar una volta completa al voltant de l'eix OX.

Solució.-



$$\text{Àrea} = \int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{8}{3} \text{ u.a.}$$

$$\text{Volum} = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^3 = \frac{32\pi}{5} \text{ u.v.}$$

PROBLEMA 3. Les qualificacions en Matemàtiques i Física de set alumnes han sigut

	1r	2n	3r	4t	5é	6é	7é
Matemàtiques	8	9	6	7	8	6	2
Física	7	7,5	5	7	7,5	5	7

Trobeu el coeficient de correlació de les qualificacions en matemàtiques i física dels sis primers alumnes.
Calculeu el coeficient de correlació d'aquestes assignatures per als set alumnes.
Expliqueu la diferència entre els dos resultats obtinguts.

Solució.-

Per als sis primers alumnes s'obté: a_{10} = 7,33; a_{01} = 6,5; m_{11} = 1,08; $\sqrt{m_{20}}$ =1,06; $\sqrt{m_{02}}$ = 1,08 , i el coeficient de correlació: ρ_6 = 0,91.

Per als set alumnes s'obté: a_{10} = a_{01} = 6,57; m_{11} = 0,60; $\sqrt{m_{20}}$ =2,13; $\sqrt{m_{02}}$ = 1,02 , i el coeficient de correlació: ρ_7 = 0,28.

La causa de la diferència de coeficients de correlació és el 2 obtingut en matemàtiques pel 7é alumne.

PROBLEMA 4. Proveu que per a un valor real de m el sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 5y + mz = 9 \end{cases}$ és indeterminat. Per a aquest valor de m trobeu totes les solucions del sistema. Interpreteu geomètricament el significat del sistema.

Solució.-

Per a que el sistema siga indeterminat és necessari que els rangs de la matriu dels coeficients i de l'ampliada amb els termes independents siguen menor que 3 $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ m = 14; per a aquest valor de m s'obté que el rang$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 14 \end{pmatrix}$= rang$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 14 & 9 \end{pmatrix}$ = 2. Un menor principal és $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ = 1 $\Rightarrow$ el sistema quedaria: $\begin{cases} x + y = 1 - z \\ x + 2y = 4 - 3z \end{cases}$ i fent z = λ s'obté x = $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4-3\lambda & 2 \end{vmatrix} = \lambda - 2$; y = $\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 1 & 4-3\lambda \end{vmatrix} = -2\lambda + 3$.

Es tracta d'un feix de tres plans amb una recta en comú.

EXERCICI B

PROBLEMA 1. Donat el sistema $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x + 5y + mz = 8 \end{cases}$ obteniu per a quins valors reals de m té una única solució i calculeu-la per a cadascun d'aquests valors de m.

Solució.-

El sistema haurà d'ésser compatible determinat $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & m \end{vmatrix} = m-3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$. Per Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & m \end{vmatrix}}{m-3} = \frac{m-3}{m-3} = 1;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & m \end{vmatrix}}{m-3} = \frac{m-3}{m-3} = 1;\; z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}}{m-3} = 0$$

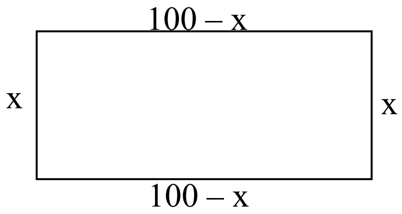
PROBLEMA 2. Els punts (x, y) que verifiquen l'equació $x^2 + y^2 = 36$ formen una corba. Expliqueu la relació entre l'equació $x^2 + y^2 = 36$ i alguna característica geomètrica d'aquesta corba.

Solució.-

Es tracta d'una circumferència de centre (0, 0) i radi 6. Si un punt (x, y) pertany a la circumferència $\Rightarrow d[(x, y), (0, 0)] = 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 6 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 36$.

PROBLEMA 3. Descomponeu un segment de longitud 200 m. en quatre parts de manera que aquestes parts siguen els costats d'un rectangle l'àrea del qual siga la màxima dins de la família de rectangles de perímetre 200.

Solució.-



$S = 100x - x^2$; $S' = 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$; com $S'' = -2 < 0$, es tracta d'un màxim.
Solució: quatre trossos de 50 m. cada un.

PROBLEMA 4. El 20% dels visos d'un gran lot són defectuosos. Se n'agafen tres a l'atzar i es demana que calculeu raonadament: **a)** La probabilitat que els tres siguen defectuosos. **b)** La probabilitat que cap siga defectuós. **c)** La probabilitat que només un siga defectuós.

Nota. El lot de visos és tan gran que després de l'extracció de tres visos es pot suposar que en queden Per l'obtenció raonada de l'apartat a de 0 a 1 punt ($0{,}2^3 = 0{,}008$).

Solució.-

La variable X = "nombre de visos defectuosos" és B(3; 0,2). Aleshores:

a) $P(X = 3) = \binom{3}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}008$; **b)** $P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}512$; **c)** $P(X = 1) =$

$= \binom{3}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384$