



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT. MATEMÀTIQUES II. JUNY 2004

EXERCICI A

PROBLEMA 1. Donat el sistema d'equacions lineals:
$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{array} \right\} \text{ amb } \lambda \text{ paràmetre}$$

real: **a)** Determineu raonadament per a quins valors de λ és compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible; **b)** Calculeu el conjunt de les solucions del sistema per al cas compatible determinat; **c)** Calculeu el conjunt de les solucions del sistema per al cas compatible indeterminat.

Solució.-

a) Igualem el determinant de la matriu dels coeficients a zero i obtenim:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda = 3; \lambda = -2. \text{ Aleshores:}$$

- si $\lambda \neq 3$ i $\lambda \neq -2 \rightarrow$ els rangs $r = r' = 3 \rightarrow$ **sistema compatible determinat;**

- si $\lambda = 3 \rightarrow r = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 2$, perquè $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ i, per exemple,

el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ i $r' = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = 2$, perquè $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$; aleshores el sistema

és **compatible indeterminat;**

- si $\lambda = -2 \rightarrow r = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 2$, perquè $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ i, per exemple,

el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$ i $r' = \text{rang} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 3$, perquè $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$;

aleshores el sistema és **incompatible.**

b) si $\lambda \neq 3$ i $\lambda \neq -2$, de la regla de Cramer, simplificant, obtenim: $x = \frac{4\lambda + 2}{\lambda + 2}$; $y = \frac{2\lambda - 2}{\lambda + 2}$;
 $z = \lambda - 2$.

c) si $\lambda = 3$, el sistema és equivalent a $\left. \begin{array}{l} x - y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{array} \right\}$ que té per solució: $x = \frac{-\lambda + 15}{5}$,

$$y = \frac{4\lambda}{5}; z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$



PROBLEMA 2. Donats els plans $\pi_1: x + y + z = -5$, $\pi_2: x - 3y - z = 3$ i la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$, **a)** Determineu raonadament la posició relativa de la recta r i la recta s intersecció dels plans π_1 i π_2 ; **b)** Calculeu raonadament l'equació del pla que conté la recta s anterior i és paral·lela a r .

Solució.-

a) Substituïm les equacions paramètriques de la recta $r: \left. \begin{matrix} x = 2\lambda + 2 \\ y = 3\lambda + 1 \\ z = 2\lambda \end{matrix} \right\}$ en la forma implícita de la recta $s: \left. \begin{matrix} x + y + z = -5 \\ x - 3y - z = 3 \end{matrix} \right\}$ i, simplificant, obtenim el sistema: $\left. \begin{matrix} 7\lambda = -8 \\ -9\lambda = 4 \end{matrix} \right\}$ que és clarament incompatible. Aleshores, les rectes r i s no es tallen. D'altra banda, el vector director de s és:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} = \overline{(2, 2, -4)}, \text{ que és independent del vector de } r, \overline{(2, 3, 2)}. \text{ Aleshores les}$$

rectes **es creuen.**

b) El pla que es demana, ve determinat per un punt de s , per exemple, $(-1, 0, -4)$, i pels vectors directores d'ambdues rectes, com ara:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z+4 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8x - 6y + z = -12$$

PROBLEMA 3. Calculeu raonadament el punt de la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el qual la recta tangent a la corba té pendent màxim i calculeu el valor d'aquest pendent.

Solució.-

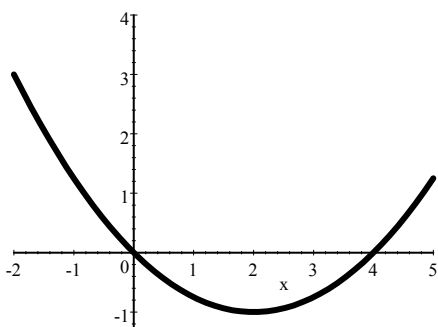
El pendent de la corba ve donat per la derivada: $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Per a trobar el valor màxim de la derivada, cal tornar a derivar: $y'' = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$, que s'anul·la per als valors $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i comprovant el signe de y'' en els entorns de x_1 i de x_2 , comprovem que y' agafa el

màxim en $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. El pendent que correspon a aquest punt és: $\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{8\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$



PROBLEMA 4. En un pla, el traçat d'una carretera discorre segons l'equació $y = \frac{x^2}{4} - x$, i un riu és l'eix OX. En el terreny entre el riu i la carretera hi ha una pineda. Si expressem les distàncies en quilòmetres, quant val la pineda si l'hectàrea es paga a 60 euros?

Solució.-



La paràbola $\frac{x^2}{4} - x$ talla a l'eix OX en els punts $x_1 = 0$ i $x_2 = 4$. Aleshores, la superfície de la pineda serà:

$$\left| \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 \right| = \frac{8}{3} \text{ km}^2.$$

Una hectàrea són $10000 \text{ m}^2 = 0,01 \text{ km}^2$, per

$$\text{tant el valor de la pineda serà: } \frac{60 \cdot \frac{8}{3}}{0,01} = 16000 \text{ euros.}$$

EXERCICI B

PROBLEMA 1. Determineu el valor real de x per al qual es compleix la propietat següent:

el determinant de la matriu $2B$ és 160, on $B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solució.-

$$\text{Det}(2B) = 8 \cdot \text{Det}(B) = 8 \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = 8(x^3 - x^2 + x - 1) = 160; \text{ simplificant obtenim}$$

l'equació: $x^3 - x^2 + x - 21 = 0$. Aplicant l'algoritme de Ruffini, obtenim l'arrel real $x = 3$, que és el valor demanat.

PROBLEMA 2. Tenim la recta $r: (x,y,z) = (t+1, 2t, 3t)$, el pla $\pi: x - 2y - z = 0$ i el punt $P = (1, 1, 1)$: **a)** Determineu l'equació del pla π_1 que passa pel punt P i és paral·lel al pla π . **b)** Determineu l'equació del pla π_2 que conté la recta r i passa pel punt P . **c)** Calculeu l'equació paramètrica de la recta intersecció dels plans anteriors, π_1 i π_2 .

Solució.-

a) Per ser paral·lel a π , tindrà una equació de la forma: $x - 2y - z + D = 0$; per passar pel punt $P(1, 1, 1)$ es complirà que $1 - 2 - 1 + D = 0 \rightarrow D = 2$. Aleshores, l'equació de π_1 serà:

$$x - 2y - z + 2 = 0$$

b) Un punt de la recta r és $Q(-1, 0, 0)$ i, per tant, el pla π_2 ve determinat pel punt P , pel vector director de r , $\vec{r} = (1, 2, 3)$ i el vector $\vec{PQ} = (2, 1, 1)$, és a dir:



$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - 5y + 3z + 1 = 0.$$

d) El vector director de la recta intersecció de π_1 i π_2 és:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -11\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

i com el punt P(1, 1, 1) també pertany a la recta, les equacions paramètriques són:

$$\left. \begin{aligned} x &= 11\lambda + 1 \\ y &= 4\lambda + 1 \\ z &= 3\lambda + 1 \end{aligned} \right\}$$

PROBLEMA 3. Calculeu tots els valors reals z de manera que $\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \ln 25$

Solució.-

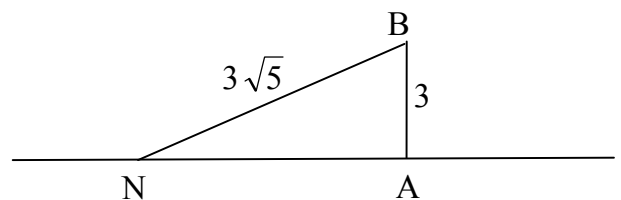
$$\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \int_0^z \left(\frac{2}{x+3} - \frac{2}{x-5} \right) dx = 2 \left[\ln \left| \frac{x+3}{x-5} \right| \right]_0^z = 2 \left[\ln \frac{z+3}{z-5} - \ln \frac{3}{5} \right] = \ln \left[\frac{5(z+3)}{3(z-5)} \right]^2$$

Aleshores: $\ln \left[\frac{5(z+3)}{3(z-5)} \right]^2 = \ln 25$

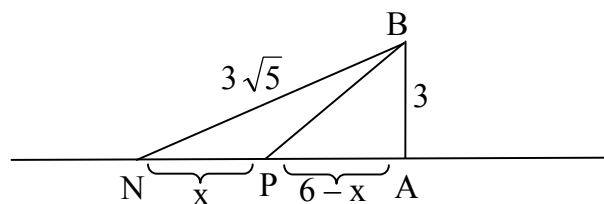
PROBLEMA 4. Des d'un punt N de vora mar, un nedador ha d'arribar a una boia que flota a 3 quilòmetres de la costa i dista $3\sqrt{5}$ quilòmetres del punt N. Si recorrent la vora (que se suposa recta i plana la seua velocitat mitjana es de 5 quilòmetres per hora, i nedant, de 3 quilòmetres per hora, quant de temps haurà de caminar fins a llançar-se al mar per a arribar a la boia en el mínim temps possible?

Solució.- Si A és el punt de la costa més pròxim a la boia, representada per B, la situació es mostra en la figura del costat.

Pel teorema de Pitàgores calclem $NA = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6$



Siga P el punt de la vora fins on ha de caminar, a distància x de N:



També pel teorema de Pitàgores podem calcular la distància $PB = \sqrt{(6-x)^2 + 3^2} = \sqrt{45 - 12x + x^2}$.



Aleshores el temps emprat en fer el recorregut NPB serà:

$$t = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{45 - 12x + x^2}}{3}, \quad x \in [0, 6]$$

Derivant i igualant a zero: $t' = \frac{1}{5} + \frac{x - 6}{3\sqrt{45 - 12x + x^2}} = 0 \rightarrow x = \frac{15}{4}$ km.

Si en la segona derivada: $t'' = \frac{3}{(\sqrt{45 - 12x + x^2})^3}$, substituïm x per $\frac{15}{4}$ ix positiu, aleshores

el valor trobat proporciona un mínim.

Per tant, el temps que haurà de caminar serà $\frac{15}{4} : 5 = \frac{3}{4}$ hores = **45 minuts..**