PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT. MATEMÀTIQUES II. JUNY 2006

EXERCICI A

PROBLEMA 1. Donat el sistema d'equacions amb incògnites x, y, z, $\left\{\begin{array}{l} x+2y-3z=\alpha \\ 2x+6y-11z=2 \\ x-2y+7z=1 \end{array}\right\}$ es demana:

a) Determineu raonadament el valor de α per al qual el sistema és compatible (1,2 punts).

b) Per a aquest valor obtingut en **a)** de α, calculeu el conjunt de solucions del sistema (1,3 punts).

c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascuna de les tres equacions del sistema, en funció dels valors de α (0,8 punts).

Solució.-

a) El determinant de la matriu dels coeficients $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$. Un menor principal es, per exemple, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2$. Aleshores, per a que el sistema siga compatible haurà de ser

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10-10\alpha = 0 \leftrightarrow \alpha = 1$$

b) Per a $\alpha = 1$, el sistema és compatible indeterminat i és equivalent a $\left.\begin{array}{l} x+2y=1+3z \\ 2x+6y=2+11z \end{array}\right\}$.

Fent $z=\lambda$ i resolent per Cramer, s'obté la solució general:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+3\lambda & 2 \\ 2+11\lambda & 6 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2-4\lambda}{2} = 1-2\lambda;\ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+3\lambda \\ 2 & 2+11\lambda \end{vmatrix}}{2} = \frac{5\lambda}{2},\ z=\lambda,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}.$$

c) Per a $\alpha = 1$, els tres plans es tallen en una recta, les equacions paramètriques de la qual son la solució general obtinguda en l'apartat b).

Per a $\alpha\neq 1$, els tres plans determinen, 2 a 2, tres rectes paral·leles de direcció $\overrightarrow{(-4,5,2)}$.

PROBLEMA 2. En l'espai es consideren:

- La recta **r** intersecció de dos plans d'equacions implícites: $x+y-z=5$ i $2x+y-2z=2$.
- I la recta **s** que passa pels punts P = (3, 10,5) i Q = (5, 12, 6). Es demana:

a) Calculeu les equacions paramètriques de la recta **r** (0,6 punts) i de la recta **s** (0,4 punts).

b) Calculeu el punt H intersecció de **r** i **s** (0,6 punts) i l'angle α que determinen **r** i **s** (0,4 punts).

c) Calculeu els punts M i N de la recta **r** per als quals l'àrea de cadascun dels triangles de vèrtexs PQM i PQN és 3 unitats d'àrea (1,3 punts).

Solució.-

a) Resolent el sistema $\left.\begin{array}{l} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \end{array}\right\}$ obtenim $\left.\begin{array}{l} x=-3+\lambda \\ y=8 \\ z=\lambda \end{array}\right\}$ que són les equacions paramètriques de **r**.

Equacions paramètriques de **s**: $\left.\begin{array}{l} x=3+2\mu \\ y=10+2\mu \\ z=5+\mu \end{array}\right\}$

b) Punt d'intersecció: $\left.\begin{array}{l} -3+\lambda=3+2\mu \\ 8=10+2\mu \\ \lambda=5+\mu \end{array}\right\} \leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda=4 \\ \mu=-1 \end{array}\right\} \leftrightarrow$ H = (1, 8, 4)

Angle: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{(1,0,1)}\cdot\overrightarrow{(2,2,1)}}{\left|\overrightarrow{(1,0,1)}\right|\left|\overrightarrow{(2,2,1)}\right|} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \leftrightarrow \alpha = 45º$.

c) La base PQ de cadascun dels triangles mesura $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = 3$. Aleshores la distància de cada un dels punts M i N a la recta **s** ha de ser 2. Com M i N pertanyen a la recta **r**, tindran la forma X(–3+λ, 8, λ). Com l'angle entre **r** i **s** és de 45º, la distància de X a **s** serà:

$$2 = \left|\overrightarrow{HX}\right|\cos 45º = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(-4+\lambda)^2+(\lambda-4)^2} = |\lambda-4| \leftrightarrow \lambda-4=\pm 2 \leftrightarrow \lambda\in\{2, 6\}$$

És a dir, els punts M i N són respectivament **(–1, 8, 2)** i **(3, 8, 6)**.

PROBLEMA 3.

a) Dibuixeu raonadament la gràfica de la funció $g(x) = x^2-4$, quan $-1\le x\le 4$ (1,1 punts).

b) Obteniu raonadament els valors màxim i mínim absoluts de la funció $f(x) = |x^2-4|$ en l'interval [– 1, 4] (1,1 punts).

c) Calculeu l'àrea del recinte limitat per la corba d'equació y = f(x) i les rectes x = –1, x = 4 i y = 0 (1,1 punts).

Solució.-

a) Es tracta del segment de paràbola d'eix x = 0, vèrtex (0, –4), que talla a l'eix OX en els punts d'abscisses x = ±2 i està comprés entre els punts (–1, –3) i (4, 12) (veure figura 1).

b) Podem construir la gràfica de f(x) simplement dibuixant la corva simètrica respecte de OX de la part negativa de g(x) (veure figura 2). Podem observar que **f(2) = 0** i **f(4) = 12** són els valors mínim i màxim absoluts, respectivament, de f(x) en [–1, 4].

c) L'àrea demanada és (veure figura 3) :

$$\int_{-1}^{2}\left(-x^2+4\right)dx + \int_{2}^{4}\left(x^2-4\right)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{2}^{4} = \frac{59}{3}$$

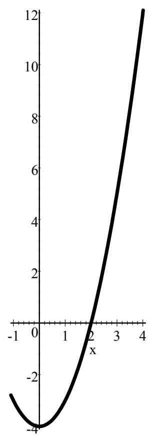


Fig. 1

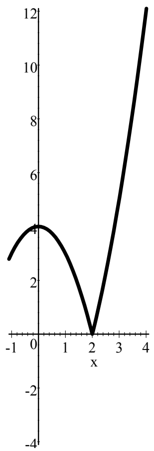


Fig. 2

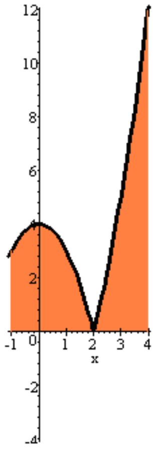


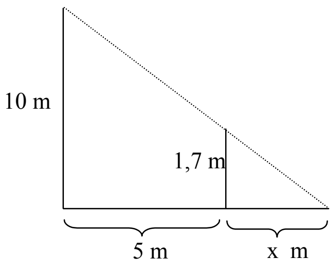
Fig.3

PROBLEMA 4. Una persona camina a la velocitat constant de 3m/s i s'allunya horitzontalment en línia recta des de la base d'un fanal el focus lluminós del qual es troba a 10 m d'altura. Sabent que la persona fa 1,70 m, calculeu:

a) La longitud de l'ombra quan la persona es troba a 5 m de la base del fanal (2 punts).

b) La velocitat de creixement de l'ombra als t segons de començar a caminar (1,3 punts).

Solució.-



a) Sent x la longitud de l'ombra, de la figura, per semblança de triangles, deduïm: $\frac{5+x}{10}=\frac{x}{1{,}7} \leftrightarrow x=\frac{85}{83}$ m $\cong 1{,}024$ m.

b) En l'instant **t**, la persona es troba a **3t** m de la base del fanal i anàlogament a l'apartat anterior, podem deduir la longitud x(t) de l'ombra:

$$\frac{3t}{10}=\frac{x(t)}{1{,}7} \leftrightarrow x(t)=0{,}51t$$

Derivant respecte de t obtenim una velocitat constant de creixement de l'ombra **v = 0,51 m/s.**

EXERCICI B

PROBLEMA 1. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{pmatrix}$ i $T=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$ es demana:

a) Proveu que la matriu T té matriu inversa, T^{-1}, i calculeu la dita matriu inversa T^{-1} (1,3 punts).

b) Donada l'equació amb matriu incògnita B, A= $T^{-1}BT$, calculeu el determinant de B (0,8 punts).

c) Obteniu els elements de la matriu B considerada en l'apartat b) (1,2 punts).

Solució.-

a) $\mathrm{Det}(T)=\begin{vmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$. Aleshores T té inversa, que serà:

$$T^{-1}=\frac{1}{\mathrm{Det}(T)}\mathrm{Adj}(T^{t})=-\begin{pmatrix}-1&-2&-1\\0&1&1\\1&0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

b) $\mathrm{Det}(A)=\mathrm{Det}(T^{-1})\cdot\mathrm{Det}(B)\cdot\mathrm{Det}(T)=\frac{1}{\mathrm{Det}(T)}\cdot\mathrm{Det}(B)\cdot\mathrm{Det}(T)=\mathrm{Det}(B)=\begin{vmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{vmatrix}=2$

c) Aïllant B $\rightarrow B=TAT^{-1}=\begin{pmatrix}2&4&1\\-1&-3&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&1\\-1&-1&-1\\2&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

PROBLEMA 2. Donats els punts:

A= (4, –4, 9); B = (2, 0,5); C = (4, 2,6)
L = (1,1,4); M=(0,2,3); i N=(3,0,5)

es demana:

a) Calculeu la distància **d** del punt C al punt mitjá del segment d'extrems A, B (0,5 punts) i l'àrea S del triangle de vèrtexs A, B, C (1 punt).

b) Calculeu les equacions implícites del pla π que passa pels punts A, B, C (0,4 punts) i del pla π' que passa pels punts L, M N (0,4 punts).

c) Calculeu l'equació paramètrica de la recta r intersecció dels plans π i π' (0,6 punts) i l'angle α que determinen els plans π i π' (0,4 punts).

Solució.-

a) El punt mitjà del segment AB és (3, –2, 7) i la distància a C: **d** = $\sqrt{1+16+1}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

L'àrea del triangle ABC = $\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(12,-6,-12)\right| = \mathbf{9}$.

b) Equació del pla π: $\begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z-9 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ **$2x - y - 2z + 6 = 0$**

Equació del pla π': $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ **$y + z - 5 = 0$**

c) Resolem el sistema: $\left.\begin{matrix} 2x-2y-2z=-6 \\ y+z=5 \end{matrix}\right\}$ obtenint: $\left.\begin{matrix} x=2 \\ y=5-\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$

L'angle α = arc cos $\frac{\overrightarrow{(2,-1,-2)}\cdot\overrightarrow{(0,1,1)}}{\left|\overrightarrow{(2,-1,-2)}\right|\cdot\left|\overrightarrow{(0,1,1)}\right|} = \frac{-3}{3\cdot\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ = 135º, o el suplementario 45º.

PROBLEMA 3. Donada la funció f(x) = lnx en l'interval tancat [1, e], sent e = 2,718281....:
a) Raoneu que hi ha un punt P de la gràfica y = ln x en què la recta tangent a aquesta és paral·lela a la recta que passa pels punts A = (1,0) i B = (e, 1) (1 punt).
b) Obteniu el punt P considerat en a) (1.8 punts).
c) Calculeu el pendent de la recta tangent a y = lnx en aquest punt P (0,5 punts).

Solució.-

a) Com la funció y = ln x és contínua en l'interval tancat [1, e] i derivable en l'interval obert]1, e[, del teorema del valor mitjà deduïm l'existència del punt P de la gràfica on la tangent és paral·lela a la recta que passa pels punts A i B.

b) Haurà de ser $\frac{1}{x} = \frac{1-0}{e-1} \leftrightarrow x = e-1$, aleshores P = (e–1, ln(e–1))

c) El pendent serà f'(e–1) = $\frac{1}{e-1}$

PROBLEMA 4. El cost del marc d'una finestra rectangular és 12,5 € per metre lineal dels costats verticals i 8 € per metre lineal dels costats horitzontals.
a) Calculeu raonadament les dimensions que ha de tenir el marc d'una finestra d' 1 m^2 de superfície perquè resulte com més econòmic millor (2,3 punts).
b) Calculeu a més el cost d'aquest marc com més econòmic millor considerat en a) (1 punt).

Solució.-

a) Siguen x i y les mesures en metres dels costats vertical i horitzontal, respectivament. El cost del marc seria C = 2(12,5x + 8y).

Com x·y = 1$\leftrightarrow$ $y = \frac{1}{x}$, substituint en l'expressió de C, queda C = $2\left(12{,}5x + \frac{8}{x}\right)$. Derivant i igualant a zero: C' = $12{,}5 - \frac{8}{x^2} = 0 \leftrightarrow x = \sqrt{\frac{8}{12{,}5}}$ = 0,8 m.

Si en la segona derivada C''=$\frac{16}{x^3}$, substituim el valor obtingut de x, s'obté que C''>0, és a dir, el cost és mínim quan **x = 0,8** m i **y = $\frac{1}{0{,}8}$ = 1,25 m**

b) El cost mínim seria C = 2(12,5·0,8 + 8·1,25) = **40 €**.