PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT. MATEMÀTIQUES II. JUNY 2003

EXERCICI A

PROBLEMA 1

Tenim el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$, que depèn del paràmetre real λ. Es demana:

a) Determineu per a quins valors de λ el sistema és compatible determinat, compatible indeterminat i incompatible

b) Obteniu-ne les solucions en els casos següents: compatible determinat i compatible indeterminat.

Solució.-

a) Calculem i igualem a zero el determinant dels coeficients del sistema:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = 0 \to \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = -1 \end{cases}$$

A continuació, per a cada cas, obtindrem el valor dels rangs **r** (de la matriu dels coeficients) i **r'** (de la matriu ampliada amb els termes independents):

- cas $\lambda = 0$: s'obté r = r' = 2 → **sistema compatible indeterminat**

- cas $\lambda = -1$: s'obté r = 2 i r' = 3 → **sistema incompatible**

- cas $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$: s'obté r = r' = 3 → **sistema compatible determinat**

b)

- cas $\lambda = 0$: el sistema queda: $\begin{cases} z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$ la solució general del qual és $\mathbf{x = 5 - 3\mu,\ y = \mu,\ z = 0,\ \forall \mu \in \mathbb{R}}$

- cas $\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq -1$: aplicant la regla de Cramer:

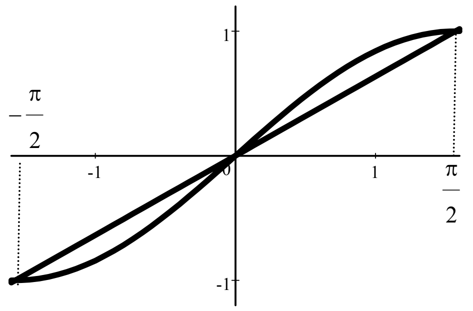
$$\mathbf{x} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{-4\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\mathbf{-4}}{\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1}};\ \mathbf{y} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\lambda^2 + 3\lambda}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{3}}{\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1}};\ \mathbf{z} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{1}}$$

PROBLEMA 2

a) Dibuixeu la recta d'equació $y = (2/\pi)x$ i la corba d'equació $y = \sin x$ quan $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$; indiqueu raonadament, per càlcul integral, l'àrea limitada entre la recta i la corba.

b) Calculeu la integral del producte de les dues funcions considerades en l'apartat anterior, és a dir, f(2/π) x sin x dx, i indiqueu quins passos heu seguit .

Solució.-



Àrea limitada entre la recta i la corba $= 2\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x - \frac{2}{\pi}x\right)dx = 2\cdot\left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$$= 2\cdot\left[\left(-\frac{\pi^2}{4\pi}\right) - (-1)\right] = \mathbf{2 - \frac{\pi}{2}}$$

b) $\int \frac{2}{\pi}x\sin x dx$ = *(per parts)* = $\frac{2}{\pi}\left[-x\cos x + \int \cos x dx\right] = -\frac{2}{\pi}x\cos x + \frac{2}{\pi}\sin x + C$

PROBLEMA 3

La taula següent mostra l'alçada (en metres) i el pes (en quilos) d'un grup de 8 treballadors d'una empresa:

Alçada	1,75	1,58	1,80	1,50	1,65	1,75	1,85	1,63
Pes	78	75	90	68	78	84	89	80

Les variables alçada i pes estan fortament correlacionades, i el seu coeficient de correlació és 0, 9197.

a) Calculeu, mitjançant regressió lineal, el pes d'un treballador amb 1,72 metres d'alçada.

b) Calculeu, mitjançant regressió lineal, l'alçada d'un treballador amb 80 quilos de pes.

Solució.-

La forta correlació existent ens permet usar les rectes de regressió per a interpolar. Farem els càlculs adients:

	Alçada (x_i)	**Pes (y_i)**	**x_i^2**	**y_i^2**	**x_iy_i**
	1,75	78,00	3,06	6084,00	136,50
	1,58	75,00	2,50	5625,00	118,50
	1,80	90,00	3,24	8100,00	162,00
	1,50	68,00	2,25	4624,00	102,00
	1,65	78,00	2,72	6084,00	128,70
	1,75	84,00	3,06	7056,00	147,00
	1,85	89,00	3,42	7921,00	164,65
	1,63	80,00	2,66	6400,00	130,40
Totals	13,51	642	22,9133	51894	1089,75
Mitjanes	1,68875	80,25	2,8641625	6486,75	136,21875

De la taula obtenim les variàncies: $\mathbf{m_{20}}$ = 2,8641625 – $1{,}68875^2$ = **0,012285938**; $\mathbf{m_{02}}$ = 6486,75 – $80{,}25^2$ = **46,6875** i la covariància $\mathbf{m_{11}}$ = 136,21875 – 1,68875·80,25 = **0,6965625** i d'açí:

la recta de regressió d'Y/X:

$$\mathbf{y - 80{,}25 = 56{,}70(x - 1{,}69) \leftrightarrow y = 56{,}70x - 15{,}50}$$

i la recta de regressió de X/Y:

$$\mathbf{x - 1{,}69 = 0{,}015(y - 80{,}25) \leftrightarrow x = 0{,}015y + 0{,}49}$$

a) Usarem la recta de regressió d'Y/X, obtenint-se: $56{,}70\cdot1{,}72 - 15{,}50 \cong$ **82,02** quilos.

b) Usarem la recta de regressió de X/Y, obtenint-se: $0{,}015\cdot80 + 0{,}49 \cong$ **1,68** m.

PROBLEMA 4

Tenim que r i r' són les rectes de l'espai $\mathbb{R}^3$, determinades de la manera següent:

r passa pels punts A = (3,6,7) i B = (7,8,3) i r' és la recta intersecció dels plans d'equacions: $x - 4y - z = -10$ i $3x - 4y + z = -2$. Calculeu:

a) De cadascuna de les rectes r i r', una equació paramètrica i determineu la posició relativa de les dues

b) La distància d entre les rectes r i r'

c) L'àrea del triangle de vèrtexs A, B i C, on C és un punt qualsevol de la recta r'.

Solució.-

a) recta r: $\begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = 6 + 2\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases}$; recta r': solució del sistema: $\begin{cases} x - 4y - z = -10 \\ 3x - 4y + z = -2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

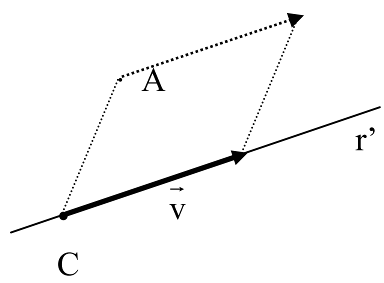
Com que els vectors d'ambdues rectes són proporcionals, i com un punt de r, per exemple A(3, 6, 7), podem comprovar que no pertany a r', aleshores **les rectes són paral·leles**.

b) Calcularem la distància del punt A(3, 6, 7) a la recta r': siga C un punt qualsevol de r', per exemple, C(3, 3, 1). Aleshores, si agafem el vector de r': $\vec{v} = (2, 1, -2)$, tenim (veure figura):

distància de r a r' $= \dfrac{\text{àrea del paral·lelogram}}{\text{mòdul de } \vec{v}} =$

$$= \frac{\text{mòdul de } \left(\overrightarrow{AC} \wedge \vec{v}\right)}{3} = \frac{\text{mòdul de} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{3} =$$

$$= \frac{\text{mòdul de } (12, -12, 6)}{3} = \frac{18}{3} = \mathbf{6.}$$



c) La mesura de l'alçària del triangle serà: d(r, r') = 6.

La mesura de la base serà : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|(4, 2, -4)\right| = 6$.

Aleshores l'àrea del triangle serà $\dfrac{6\cdot6}{2} =$ **18**.

EXERCICI B

PROBLEMA 1

a) Calculeu les matrius reals quadrades d'ordre3, X i Y, que satisfan les equacions següents:

$$\begin{cases} 2X + Y = B \\ X - 2Y = C \end{cases} \quad \text{on} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si X i Y són les matrius anteriors, calculeu la matriu (2X + Y) X – (2X + Y) (2Y).

Solució.-

a) $X = \frac{1}{5}(2B + C) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $Y = \frac{1}{5}(B - 2C) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $(2X + Y)X - (2X + Y)(2Y) = BX - B\cdot 2Y = B(X - 2Y) = B\cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

PROBLEMA 2

Tenim que T és un triangle de perímetre 60 cm. Un dels costats del triangle T té x cm, i els altres dos costats tenen la mateixa longitud.

a) Obteniu raonadament les expressions de les funcions A i f , sent:

A(x) = Àrea del triangle T.

$f(x) = \{A(X)\}^2$.

Obteniu també entre quins valors pot variar x.

b) Obteniu raonadament el valor de x per al qual f (x) aconsegueix el valor màxim

Solució.-

T és un triangle isòsceles de base x, cada un dels costats iguals val $30 - \frac{x}{2}$ i l'alçària del qual és $h = \sqrt{\left(30 - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{900 - 30x}$. En conseqüència:

a) $A(x) = \frac{x\sqrt{900 - 30x}}{2}$; $f(x) = \frac{x^2(900 - 30x)}{4} = 225x^2 - \frac{15}{2}x^3$; $x \in [0, 30]$

b) $f'(x) = 450x - \frac{45}{2}x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$

$f''(x) = 450 - 45x \begin{cases} f''(0) > 0 \rightarrow \text{mínim} \\ f''(20) < 0 \rightarrow \text{màxim} \end{cases}$

Per tant per a **x = 20** s'aconsegueix el valor màxim de f(x), dins de l'interval [0, 30].

PROBLEMA 3

Un dau amb les cares numerades del 1 al 6 és llançat cinc vegades. Obteniu la probabilitat que el número 3 aparega:

a) Exactament dues vegades.

b) Una vegada com a màxim.

c) Més de dues vegades.

NOTA: Tots el números tenen la mateixa probabilitat d'eixir en cada llançament.

Solució.-

La variable aleatòria X = "nombre de vegades que ix el 6" és binomial $B\left(5,\frac{1}{6}\right)$. Aleshores:

a) $P(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{1250}{6^5} \cong$ **0,16**

b) $P(X \le 1) = \binom{5}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{2\cdot 5^5}{6^5} = \frac{6250}{6^5} \cong$ **0,80**

c) $P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \left(\frac{1250}{6^5} + \frac{6250}{6^5}\right) = 1 - \frac{7500}{6^5} \cong$ **0,035**

PROBLEMA 4

Tenim que r és la recta i π el pla de $\mathbb{R}^3$, determinats de la manera següent:
r passa pels punts (2, 2,4) i (–1, 2, 1) i π passa pels punts (1, 0, l), (1, –1, 0) i (3, 0, 0). Es demana:

a) Demostreu que la recta r no és paral·lela a π.

b) Calculeu el punt P d'intersecció de r i π i l'angle que formen la recta r i el pla π.

c) Determineu els punts S i T de la recta r que complisquen que la seua distancia a π siga 4.

Solució.-

L'equació del pla π és $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x - 2y + 2z - 3 = 0$ i la forma paramètrica de r

és: $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 2 \\ z = 4+\lambda \end{cases}$. Per tant:

a) El producte escalar del vector director de la recta i del vector normal al pla és:

$$(1, 0, 1)\cdot(1, -2, 2) = 3 \neq 0$$

per tant la recta no és paral·lela al pla.

b) Substituint la recta en el pla, obtenim: $2 + \lambda - 4 + 8 + 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow \lambda = -1$ d'on s'obté el punt d'intersecció: **P(1, 2, 3)**;

l'angle que formen la recta r i el pla π:

$$\alpha = \text{arc sin}\frac{3}{|(1,0,1)|\cdot|(1,2,-2)|} = \arcsin\frac{3}{3\sqrt{2}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{45^o}$$

c) Un punt de r és $(2+\lambda, 2, 4+\lambda) \rightarrow 4 = d(r, \pi) = \frac{|3\lambda+3|}{3} = |\lambda + 1| \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \rightarrow S = (5,2,7) \\ \lambda = -5 \rightarrow T = (-3,2,-1) \end{cases}$$