



PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT. MATEMÀTIQUES II. JUNY 2002

EXERCICI A

PROBLEMA 1. Per a cada terna de nombres reals (xyz) , es consideren las matrius

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 1 & y & -1 \\ 2 & z & -1 \end{pmatrix}$$

- i) Calculeu els determinants de les matrius A i B.
- ii) Per a $x = y = z = 1$, calculeu el determinant de la matriu producte A·B.
- iii) Obteniu, raonadament, per a quins valors de x, y, z, cap de les matrius A i B té inversa.

Solució:

- i) $\text{Det}(A) = 10x - 8y + 2z$; $\text{Det}(B) = -x - 4y + 3z$
- ii) $\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B) = 4 \cdot (-2) = -8$
- iii) Haurà de verificar-se simultàniament que: $\left. \begin{matrix} 10x - 8y + 2z = 0 \\ -x - 4y + 3z = 0 \end{matrix} \right\}$ sistema compatible indeterminat que, resolt, dóna: $x = \lambda, y = 2\lambda, z = 3\lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

PROBLEMA 2. Si teniu els punts A = (1, -2, 3) i B = (0, 2, 1), es demana:

- a) L'equació paramètrica de la recta que passa per ambdós punts.
- b) L'equació del pla π que està a igual distància de A i de B.
- c) La distància a l'origen de la recta intersecció del pla $2y - z = 0$ amb el pla π de l'apartat b).

Solució:

$$\text{a) } \left. \begin{matrix} x = 1 + \lambda \\ y = -2 - 4\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{matrix} \right\}$$

b) Aquest apartat té infinites solucions. Un pla $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ que estiga a igual distància de A i de B, haurà de complir:

$$|A - 2B + 3C + D| = |2B + C + D| \Leftrightarrow \begin{cases} A - 2B + 3C + D = 2B + C + D \\ \text{o bé} \\ A - 2B + 3C + D = -2B - C - D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2C + 4D \\ \text{o bé} \\ A = -4C - 2D \end{cases}. \text{ Un}$$

cas particular podria ser, per exemple, el pla π_1 que passe per A, per B i per (0, 0, 0): $\left| \begin{matrix} x & y & z \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix} \right| = 0$

$\Leftrightarrow -8x - y + 2z = 0$; o per exemple el pla π_2 mediatriu del segment AB: (vector normal (1, -4, 2) i passa pel punt mig del segment AB: $(\frac{1}{2}, 0, 2)$): $x - 4y + 2z - \frac{9}{2} = 0$; etc.



c) Si agafem el pla π_1 anterior, la recta intersecció passa per l'origen, aleshores la distància seria zero; si agafem el pla π_2 anterior, la recta intersecció seria:

$$\left. \begin{array}{l} 2y - z = 0 \\ x - 4y + 2z - \frac{9}{2} = 0 \end{array} \right\} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x, y, z) = \left(\frac{9}{2}, 0, 0 \right) + \lambda \overline{(0, 1, 2)} \quad \text{i la distància seria } \frac{\text{Mod} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ \frac{9}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{|\overline{(0, 1, 2)}|} = \frac{\frac{9}{2} \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{9}{2}; \text{ etc...}$$

PROBLEMA 3. Les hores d'estudi i les qualificacions en Matemàtiques de set alumnes han sigut:

	1r	2n	3r	4t	5é	6é	7é
Hores d'estudi	17	17,5	13	17	17,5	15	4
Matemàtiques	8	9	6	7	8	6	2

- Trobeu el coeficient de correlació entre les qualificacions en Matemàtiques i les hores d'estudi d'estos alumnes.
- Expliqueu el significat del coeficient de correlació.
- Expliqueu raonadament com s'estima la qualificació en Matemàtiques que obtindria un alumne en estudiar 20 hores.

Solució.-

- Fent els càlculs adients, s'obté el coeficient de correlació $\rho \cong 0,96$
- El fet que el coeficient de correlació siga positiu i pròxim a 1 significa que la correlació és molt forta, és a dir, els punts definits en la taula estan pràcticament en línia recta i al augmentar les hores d'estudi, augmenta la nota de Matemàtiques.
- Si calculem la recta de regressió Nota de Matemàtiques/Hores d'estudi, s'obté:
 $y = 0,452x + 0,044$, de manera que podem usar-la per a extrapolar els valors de la taula. Si $x = 20$, s'obtindria una nota $y = 9,09$.

PROBLEMA 4. Trobeu el valor positiu de a perquè $\int_0^{a-1} (x+1) dx = \frac{9}{2}$. Obteniu, raonadament, la integral que dóna l'àrea de la superfície compresa entre l'eix OX, la corba $y = x + 1$ i les rectes $x = 0$ i $x = 2$.

Solució.-

$$\frac{9}{2} = \int_0^{a-1} (x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_0^{a-1} = \frac{a^2 - 1}{2} : \text{ aquesta equació té per solució } \pm \sqrt{10}, \text{ aleshores}$$

$a = \sqrt{10}$; l'àrea que ens demanen és la integral anterior, per a $a = 3 \Rightarrow$ el seu valor és **4**.



EXERCICI B

PROBLEMA 1. Per a cada nombre real λ , $M(\lambda)$ és la matriu $M(\lambda) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & \lambda \\ 2 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{pmatrix}$ Es demana

que:

i) Obtingueu l'expressió del determinant de la matriu $M(\lambda)$, i justifiqueu que per a qualsevol nombre real λ existix la matriu $M(\lambda)^{-1}$ inversa de $M(\lambda)$.

ii) Calculeu la matriu $M(0)^{-1}$

iii) Si $A = M(8)$, $B = M(4)$ i $C = M(3)$, calculeu, raonadament, el determinant de la matriu producte $A B^{-1} C^{-1}$.

Solució.-

i) $M(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$; si $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \notin \mathbb{R}$, per tant, per a qualsevol valor real de λ , $M(\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow M(\lambda)$ té inversa $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

ii) $\text{Det}[M(0)] = 2 \Rightarrow M(0)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

iii) $\text{Det}(A B^{-1} C^{-1}) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B^{-1}) \cdot \text{Det}(C^{-1}) = \frac{\text{Det}(A)}{\text{Det}(B) \cdot \text{Det}(C)} = \frac{50}{10 \cdot 5} = 1$.

PROBLEMA 2. a) Trobeu la distància del punt $P = (3, -1, 4)$ a la recta r intersecció dels plans:

$$\pi_1: 2x + y - z + 5 = 0$$

$$\pi_2: 4x + 4y - z + 9 = 0$$

b) Trobeu l'equació del pla que passa per la recta r i el punt P .

Solució.-

a) La recta r en forma paramètrica és: $\left. \begin{matrix} x = -2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 - 4\lambda \end{matrix} \right\} \Rightarrow d(P, r) = \frac{\text{Mod} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & -4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{|(-3, 2, -4)|} = \sqrt{6}$

b) $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2x + 11y + 7z - 11 = 0$

PROBLEMA 3. Considereu les funcions definides per a $x \geq 0$, $f(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ i

$g(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Calculeu $f'(x)$ i $g'(x)$ i expresseu-les de la manera més simplificada possible

Compareu els resultats i deduïu justificadament la diferència entre $f(x)$ i $g(x)$.



Solució.-

S'obté $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Aleshores $f(x) - g(x) = \text{constant}$ (per que tenen la mateixa derivada). Però: $f(0) = 0$ i $g(0) = 0$. Per tant $f(x) - g(x) = 0$.

PROBLEMA 4. El 20% dels habitants d'una gran ciutat voten el partit polític B. Se seleccionen a l'atzar tres habitants i es demana calcular raonadament: **a)** La probabilitat que els tres voten el partit B. **b)** La probabilitat que ningú vote el partit B. **c)** La probabilitat que solament un vote el partit B.

Nota. El nombre d'habitants és tan gran que sempre es pot considerar, que després de seleccionar un, dos o tres ciutadans, un 20% dels no seleccionats són els que voten el partit B.

Solució.-

La variable $X = \text{"nombre de votants de B"}$ és Binomial de paràmetres 3; 0,2. Aleshores:

- a)** $P[X = 3] = \binom{3}{3} 0,2^3 = 0,008$
b) $P[X = 0] = \binom{3}{0} \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^3 = 0,512$
c) $P[X = 1] = \binom{3}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,384$