PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT. MATEMÀTIQUES CCSS. JUNY 2002

EXERCICI A

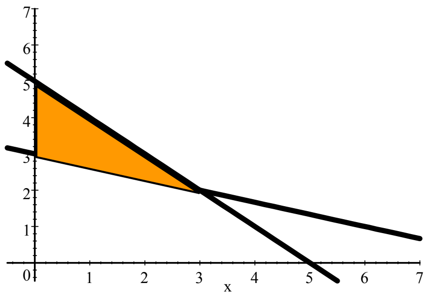
PROBLEMA 1. Es considera la regió factible donada pel conjunt de restriccions següents:

$$x + y \le 5$$
$$x + 3y \ge 9$$
$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

Representeu la regió factible que determina el sistema d'inequacions anterior i calculeu de forma raonada el punt o els punts de la regió factible en què les funcions següents assolixen el seu màxim i el seu mínim: **a)** $f(x,y) = 2x + 3y$, **b)** $f(x,y) = y - x$.

SOLUCIÓ.-

1.- La regió determinada per les inequacions és la següent:



Els punts on la funció pot assolir els extrems són el (0,3) (0,5) i (3,2) que són els vèrtexs del triangle que forma la regió factible.

a) Per a la funció f(x,y) = 2x + 3y f(0, 5) = 15 f(0,3) = 9 f(3,2) = 12, per tant el màxim està en **(0,5)** i el mínim en **(0,3)**

b) Per a la funció f(x,y) = y – x f(0,5) = 5 f(0,3) = 3 f(3,2) = –1 i el màxim es troba en **(0,5)** i el mínim en **(3,2)**

PROBLEMA 2. Un tren transporta 500 viatgers i la recaptació de l'import dels bitllets d'estos ascendix a 2.115 €. Calculeu de forma raonada quants viatgers han pagat l'import total del bitllet, que val 9 €, quants han pagat el 20% del bitllet i quants el 50%, sabent que el nombre de viatgers que han pagat el 20% és el doble del nombre de viatgers que han pagat el bitllet sencer.

SOLUCIÓ.-

El sistema seria $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 500 \\ 9x + 1{,}8y + 4{,}5z = 2115 \\ y = 2x \end{array}\right\}$

que té com a resultat **x =150 y = 300 z = 50**

PROBLEMA 3. La velocitat (en m/s) que assolix un atleta en una carrera de 200 metres és donada en funció de l'espai recorregut, *x*, per l'expressió següent:

$$f(x) = -0{,}00055x(x - 300)$$

Deduïu de forma raonada:

a) Quina distància ha recorregut l'atleta quan assolix la seua velocitat màxima? Quina és esta velocitat?
b) Entre quines distàncies la velocitat de l'atleta va augmentant? I disminuint?
c) A quina velocitat arriba a la meta?

SOLUCIÓ.-

La funció ve donada per $f(x) = -0{,}00055x(x-300)$ on x és l'espai i f(x) la velocitat

a) Derivem per a calcular el valor de x on assoleix el màxim

$f'(x) = -0{,}0011x + 0{,}165$. Fem $f'(x) = 0$ **x = 150m**. És a dir el màxim s'assoleix quan ha recorregut 150m.

En eixe moment, la velocitat és **f (150) = 12,375m/s**

b) Va augmentant en l'interval **[0, 150[** i disminueix en el **] 150, 200]**

c) En la meta la velocitat és **f(200) = 11m/s**

PROBLEMA 4. En un aparell de ràdio hi ha presintonitzades tres emissores A, B i C que emeten durant tot el dia. L'emissora A sempre oferix música, mentre que la B i la C ho fan la meitat del temps d'emissió. En encendre la ràdio se sintonitza indistintament qualsevol de les tres emissores.

a) Obteniu de forma raonada la probabilitat que en encendre la ràdio sentim música.

b) Si en encendre la ràdio no sentim música, calculeu de forma raonada quina és la probabilitat que l'emissora B estiga sintonitzada.

SOLUCIÓ.-

Coneixem del problema les següents dades : p(A) = p(B) = p(C) = 1/3
i també les probabilitats condicionades :
p(música/A) = 1 p(música/B) = 0,5 p(música/C) = 0,5

a) Ens demana la probabilitat d'escoltar música al encendre la ràdio. Apliquem el teorema de la probabilitat total

p(música) = p(A)· p(música/A) + p(B)· p(música/B) + p(C)· p(música/C) =

$$= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}5 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}5 = \frac{2}{3}$$

b) Ara ens demana la p(B/ no música). Aplicant el teorema de Bayes tenim:

$$\text{p(B/ no música)} = \frac{\text{p(no música / B)}\cdot \text{p /(B)}}{\text{p(no mus./ A)}\cdot\text{p(A)} + \text{p(no mús./ B)}\cdot\text{p(B)} + \text{p(no mús./ C)}\cdot\text{p(C)}} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot\frac{1}{3}}{0\cdot\frac{1}{3} + 0{,}5\cdot\frac{1}{3} + 0{,}5\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

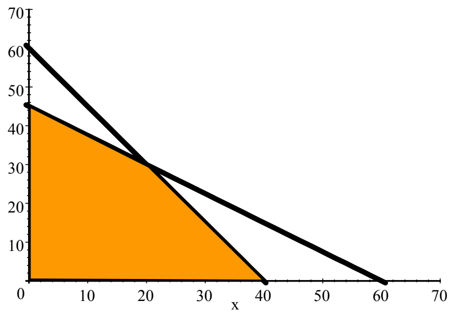
EXERCICI B

PROBLEMA 1. Es disposa de 120 refrescs de cola amb cafeïna i de 180 refrescs de cola sense cafeïna. Els refrescs es venen en paquets de dos tipus. Els paquets de tipus A contenen tres refrescs amb cafeïna i tres sense cafeïna, i els de tipus B en contenen dos amb cafeïna i quatre sense cafeïna. El venedor guanya 6 € per cada paquet que venga de tipus A i 5 € per cada paquet que venga de tipus B. Calculeu de forma raonada quants paquets de cada tipus ha de vendre per tal de maximitzar el benefici i calculeu este benefici.

SOLUCIÓ.-

El plantejament del problema és el següent :

Maximitzar la funció $\left.\begin{array}{l} f(x,y) = 6x + 5y \\ 3x + 2y \le 120 \\ 3x + 4y \le 180 \\ x, y \ge 0 \end{array}\right\}$



La regió factible ve determinada pels vèrtexs (0, 0), (0, 45), (40, 0) i (30,15) que és el punt de tall de les rectes definides per les restriccions. Si substituïm en la funció:
f(0, 0) = 0; f(0,45) = 225; f(40,0) = 240; **f(30,15) = 255** que correspon al màxim

PROBLEMA 2. Els tres vèrtexs d'un triangle són A=(0, 1), B=(1, 2) i C=(3, 0).

a) Calculeu de forma raonada l'equació de la recta paral·lela al costat AB que passa pel punt C

b) Calculeu el punt d'intersecció d'esta recta amb la recta d'equació $x + 3y = 2$.

SOLUCIÓ.-

a) El vector AB té per coordenades $(u_1, u_2) = (1, 1)$. El pendent ve donat per $m = \dfrac{u_2}{u_1} = 1$. Utilitzant la fórmula de la recta punt-pendent $y - y_0 = m(x - x_0)$ ens dona $y = x - 3$

b) Per a calcular el punt d'intersecció resolem el sistema $\left.\begin{array}{l} y = x - 3 \\ x + 3y = 2 \end{array}\right\}$ que té per solució

$x = \dfrac{11}{4} \qquad y = -\dfrac{1}{4}$

PROBLEMA 3. La funció $f(t) = 2'1t^2 + 0'8t - 1$, per a $0 \le t \le 9$, en què el temps, *t*, és expressat en anys, proporciona els beneficis d'una empresa en milers d'euros entre els anys 1991 (*t* = 0) i 2000 (*t* = 9).

a) Calculeu de forma raonada la taxa de variació mitjana del benefici d'esta empresa en este període de temps.

b) Obteniu de forma raonada la taxa de variació mitjana del benefici en els dos últims anys.

c) Què podem concloure sobre la variació del benefici en els dos períodes anteriors?

SOLUCIÓ.-

a) La taxa de variació mitjana ve donada pel quocient

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{f(9)-f(0)}{9-0}=\frac{176{,}3-(-1)}{9}=19{,}7 \text{ milers €}$$

b) Aplicant la mateixa fórmula $\frac{f(9)-f(7)}{9-7}=\frac{176{,}3-107{,}5}{2}=34{,}4$ milers €

c) Podem concloure que en el segon període el creixement ha sigut més ràpid

PROBLEMA 4. Un alumne fa un examen tipus test que consta de 4 preguntes. Cadascuna de les preguntes té tres respostes possibles de les quals sols una és correcta. Si un alumne aprova contestant correctament dos o més preguntes, obteniu de forma raonada la probabilitat que aprove si tria les respostes de cadascuna de les preguntes completament a l'atzar.

SOLUCIÓ.-

Sabem que p(conteste 2) = $\binom{4}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{24}{81}$ p(conteste 3) = $\binom{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$

p(conteste 4) = $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{81}$ **.** Per tant la probabilitat de que aprove serà:

p(aprove) = p($2\cup 3\cup 4$) = $\frac{24}{81}+\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{33}{81}=0{,}4074$