José Jaime Mas Bonmatí E-Mail: josejaime@ieslaasuncion.org
I.E.S. La Asunción Departamento de Matemáticas
http://www.ieslaasuncion.org

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II Geometría 2º BAT C 14/02/07

NOMBRE:____

1.– Dados los puntos $A(2,-1,2)$ $B(4,-3,-1)$ $C(-2,1,1)$ $D(-1,-1,k)$

a) Halla el punto del segmento $\overline{AB}$ que dista triple de A que de B *(0,5 puntos)*
b) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A y B. *(0,5 puntos)*
c) Halla la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos A, B y C. *(0,5 puntos)*
d) Halla el valor del parámetro “k” para que los 4 puntos sean coplanarios. *(0,75 puntos)*
e) Halla el área del triángulo de vértives A, B y C. *(0,75 puntos)*

2.– Dados los planos $\pi_1 : 3x - y + 2z = 3$ y $\pi_2 : -6x + ay + bz = 5$
a) ¿Para qué valores de “a” y “b” son secantes, paralelos o coincidentes? *(1 punto)*
b) Halla el ángulo que forman cuando $a = 0$ y $b = 1$ *(1 punto)*

3.– Dado el punto $A(-6,2,0)$ y la recta r: $\left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{array}\right\}$

a) Halla el punto A' simétrico de A respecto de la recta r *(2 puntos)*
b) Halla la distancia del punto A a la recta r *(1 punto)*

4.– Hallar los puntos de la recta “r” que equidistan de los planos π_1 *y* π_2 *siendo:*

r: $\left.\begin{array}{l} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{array}\right\}$ $\pi_1 :\ 2x + y - 2z = 0$ $\pi_2 :\ x - 2y + 2z - 1 = 0$ *(2 puntos)*

José Jaime Mas Bonmatí E-Mail: josejaime@ieslaasuncion.org
I.E.S. La Asunción Departamento de Matemáticas
http://www.ieslaasuncion.org

EXAMEN 2º BAT GEOMETRÍA 14-02-07

① $A(2,-1,2)$, $B(4,-3,-1)$, $C(-2,1,1)$, $D(-1,-1,K)$

0'5 a) $A(2,-1,2)$ — $C(x,y,z)$ — $B(4,-3,-1)$

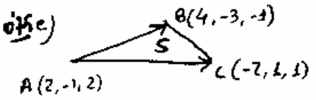
$\vec{OC} = \vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{AB} = (2,-1,2) + \frac{3}{4}(2,-2,-3) = \left(2+\frac{6}{4}, -1-\frac{6}{4}, 2-\frac{9}{4}\right) = \boxed{\left(\frac{7}{2}, \frac{-5}{2}, \frac{-1}{4}\right)}$

0'5 b) $\vec{v_r} = \vec{AB} = (2,-2,-3) \Rightarrow r: \boxed{\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{-3}}$

0'5 c) π: Los vectores directores son $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ $\quad \vec{AB} = (2,-2,-3) \quad \vec{AC} = (-4,2,-1)$
Un punto $A(2,-1,2)$ $\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-2 \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)\cdot 8 + (y+1)\cdot 14 + (z-2)\cdot(-4) = 0 \Rightarrow 8x + 14y - 4z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 4x + 7y - 2z + 3 = 0}$

0'5 d) Serán coplanarios si $D \in \pi \Rightarrow 4(-1) + 7(-1) - 2\cdot K + 3 = 0 \Rightarrow -8 = 2K \Rightarrow \boxed{K = -4}$
También podemos hallar K exigiendo que $\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 0$

0'5 e) 

$S = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 14^2 + (-4)^2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{276}}$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 8\vec{i} + 14\vec{j} - 4\vec{k} \Rightarrow$

② $\pi_1: 3x - y + 2z = 3$
1 $\quad \pi_2: -6x + ay + bz = 5$

a) Serán paralelos si: $\frac{-6}{3} = \frac{a}{-1} \to a = 2$
o coincidentes $\quad \frac{-6}{3} = \frac{b}{2} \to b = -4$

Para $a = 2$ y $b = -4$ los planos son paralelos pues $\frac{-6}{3} \neq \frac{5}{3}$
Para $a \neq 2$ ó $b \neq -4$ los planos son secantes

1 b) Cuando $a = 0$ y $b = 1$ es $\left.\begin{array}{l} \vec{n}_{\pi_1} = (3,-1,2) \\ \vec{n}_{\pi_2} = (-6,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{|(3,-1,2)\cdot(-6,0,1)|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-6)^2+0^2+1^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{37}} = 0'702999 \Rightarrow \boxed{\alpha = 45{,}3318^\circ}$

③ $A(-6,2,0) \quad r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{array}\right\}$
2

a) 

1º) Calculamos el plano $\pi \perp$ a r que pasa por A
$\pi: -x + y - 3z + D = 0$, $A \in \pi \Rightarrow -(-6) + 2 - 3\cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = -8 \Rightarrow$
$\Rightarrow \pi: -x + y - 3z - 8 = 0$

2º) Calculamos el punto de corte de r y π
$-(1-t) + (-2+t) - 3(-3t) - 8 = 0 \Rightarrow 11t - 11 = 0 \Rightarrow t = 1$
El punto M de corte es $M(0,-1,-3)$

3º) $A(-6,2,0)$ — $M(0,-1,-3)$ — $A'(x,y,z)$
El punto A' simétrico cumple
$\frac{x-6}{2} = 0 \to x = 6 \quad \frac{y+2}{2} = -1 \to y = -4 \quad \frac{z+0}{2} = -3 \to z = -6$
Solución $\boxed{A'(6,-4,-6)}$

1 b) Dos formas de hallar $d(A,r)$. 1ª forma $d(A,r) = d(A,M) = \sqrt{(0+6)^2 + (-1-2)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{36+9+9} = \boxed{\sqrt{54}\ u}$

2ª forma $d(A,r) = \frac{\left|\vec{AA_r} \wedge \vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|} = \frac{\sqrt{12^2 + 21^2 + 3^2}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{594}}{\sqrt{11}} = \boxed{\sqrt{54}\ u.}$

Sea $A_r(1,-2,0) \Rightarrow \vec{AA_r} = (7,-4,0) \Rightarrow \vec{AA_r} \wedge \vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 21\vec{j} + 3\vec{k}$

④ $r: \left.\begin{array}{l} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{array}\right\} \quad \pi_1: 2x + y - 2z = 0 \quad \pi_2: x - 2y + 2z - 1 = 0$
2

Los puntos pedidos son los puntos de la recta r que cortan a los planos bisectores
Pasemos a paramétricas la recta r: $\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{array}\right\}$

$P(\lambda, 2-\lambda, -1+\lambda) \quad d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2)$

$\frac{|2\lambda + 2 - \lambda - 2(-1+\lambda)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}} = \frac{|\lambda - 2(2-\lambda) + 2(-1+\lambda) - 1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} \Rightarrow |-\lambda + 4| = |5\lambda - 7|$

$-\lambda + 4 = 5\lambda - 7 \qquad -\lambda + 4 = -(5\lambda - 7)$
$11 = 6\lambda \qquad -\lambda + 4 = -5\lambda + 7$
$\lambda = \frac{11}{6} \qquad 4\lambda = 3$
$\qquad \lambda = \frac{3}{4}$

Para $\lambda = \frac{11}{6} \Rightarrow P\left(\frac{11}{6}, 2 - \frac{11}{6}, -1 + \frac{11}{6}\right) = \boxed{\left(\frac{11}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)}$

Para $\lambda = \frac{3}{4} \Rightarrow Q\left(\frac{3}{4}, 2 - \frac{3}{4}, -1 + \frac{3}{4}\right) = \boxed{\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{-1}{4}\right)}$