José Jaime Mas Bonmatí E-Mail: josejaime@ieslaasuncion.org
I.E.S. La Asunción Departamento de Matemáticas
http://www.ieslaasuncion.org

EXAMEN DE MATEMÁTICAS II Matrices y Determinantes 2º BAT C 31/10/06

Nombre: ....

1.– a) Calcula las matrices cuadradas de orden 3, X e Y, que satisfacen las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 2X+Y=B \\ X-2Y=C \end{array}\right\} \text{ siendo } B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Si B y C son las matrices anteriores, calcula la matriz $C(B+C+3I)-(C+B)^2-C+B^2$

(2,25 puntos)

2.– Determinar el valor real de x para el que se cumple la siguiente propiedad:

el determinante de la matriz $2B$ es 160, siendo $B=\begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$

(2 puntos)

3.– Explica las propiedades que permiten escribir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 56 \end{vmatrix} = \dot{4}$$

(1,75 puntos)

4.– Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la expresión de A^n

b) Mostrar que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1,75 puntos)

5.– Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores reales de x para los que A tiene inversa.

b) Hallar la matriz Y que es solución de la ecuación matricial $AY-Y=A$ siendo A la matriz anterior para $x=4$.

(2,25 puntos)

José Jaime Mas Bonmatí E-Mail: josejaime@ieslaasuncion.org
I.E.S. La Asunción Departamento de Matemáticas
http://www.ieslaasuncion.org

EXAMEN MATEMÁTICAS II Matrices y Determinantes 31-10-2006

1 (2'25 p)

a) $\left.\begin{array}{l} 2X+Y=B \\ X-2Y=C \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} 4X+2Y=2B \\ X-2Y=C \end{array}\right\}$

$5X = 2B+C \rightarrow X = \frac{1}{5}(2B+C) = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

$\left.\begin{array}{l} 2X+Y=B \\ -2X+4Y=-2C \end{array}\right\}$

$5Y = B-2C \rightarrow Y = \frac{1}{5}(B-2C) = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$

b) $C\cdot(B+C+3I)-(C+B)^2-C+B^2 = CB+C^2+3C-(C^2+CB+BC+B^2)-C+B^2 = 2C-BC \overset{(*)}{=} \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

(*) $B\cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

---

2 (2 p)

$\det(2B)=160 \Rightarrow 2^3\cdot\det(B)=160 \Rightarrow \det(B)=20$

$|B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{4x}+6x+(x+1)(2-x^2)-\cancel{4x}-3(x+1)-2x(2-x^2) = 6x+2x-x^3+2-x^2-3x-3-4x+2x^3 = x^3-x^2+x-1$

Es $x^3-x^2+x-1=20 \Rightarrow x^3-x^2+x-21=0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x^2+2x+7)=0$

$x=3$

$x^2+2x+7=0$ no tiene solución

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 1 & -21 \\ 3 & & 3 & 6 & 21 \\ \hline & 1 & 2 & 7 & 0 \end{array}$$

Solución $\boxed{x=3}$

---

3 (1'75 p)

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 5 & 56 \end{vmatrix} = \dot{4}$

$C_2+10\cdot C_1 = C_2'$ La C_2 es múltiplo de 4

---

4 (1'75 p)

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Supongamos que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{n+1} = A^n\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

b) Basta ver que $A^n\cdot(A^n)^{-1}=I$. $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

También podemos utilizar la fórmula $(A^n)^{-1} = \frac{1}{|A^n|}\cdot Adj(A^n)^t$

$(A^n)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A^n)^t = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A^n| = 1$

$\Rightarrow (A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

5 (2'25 p)

$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

a) $|A| = (x-2)^2\cdot x \Rightarrow A$ no tiene inversa para $x=2$ y para $x=0$.

b) $AY-Y=A \Rightarrow (A-I)Y=A \Rightarrow Y=(A-I)^{-1}\cdot A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Cuando $x=4$ es $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A-I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A-I|=3$

$(A-I)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj(A-I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A-I)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución $\boxed{Y = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$