José Jaime Mas Bonmatí E-Mail: josejaime@ieslaasuncion.org
I.E.S. La Asunción Departamento de Matemáticas
http://www.ieslaasuncion.org

EXAMEN DE MATEMÁTICAS ÁLGEBRA 2º BAT 16/11/2006

Nombre: ....

1.– Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x-4y+3z=3 \end{array}\right\}$$

a) ¿Es un sistema de Cramer?. ¿Por qué?
b) Resuélvelo por el método de Gauss.

(2 puntos)

2.– Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) $A\cdot B$; b) $B\cdot A$; c) $C\cdot(A+B^t)$ d) C^{-1}

(2 puntos)

3.– Resolver la ecuación matricial $AX+B=2C$ siendo $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2,5 puntos)

4.– Dos hijos deciden hacer un regalo de 100 € a su madre. Como no tienen suficiente dinero, cuentan con la ayuda de su padre, decidiendo pagar el regalo de la siguiente forma: el padre paga el triple de lo que pagan los dos hijos juntos y, por cada 2 € que paga el hermano menor, el mayor paga 3 € ¿Cuánto dinero ha de poner cada uno?

(2,5 puntos)

5.– Indicar las propiedades de los determinantes que permiten escribir las siguientes igualdades:

$$\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(1 punto)

EXAMEN de Matemáticas Aplicadas CCSS II

1 2p

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ 3x - 4y + 3z = 3 \end{array}\right\}$$

a) Será un sistema de Cramer si el nº de ecuaciones e incógnitas es el mismo y el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} = -3+6+8-3-12+4 = 0 \Rightarrow \text{No es un sistema de Cramer.}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ (-3)\ 2x - y + z = 2 \\ 3x - 4y + 3z = 3 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ (-2)\ -5y + 3z = 0 \\ -10y + 6z = 0 \end{array}\right\} \sim \left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 1 \\ -5y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right. \rightarrow y = \frac{3\lambda}{5}$$

$$x + 2\cdot\frac{3}{5}\lambda - \lambda = 1$$

$$5x + 6\lambda - 5\lambda = 5 \rightarrow x = \frac{5-\lambda}{5}$$

SOLUCIÓN

$$\boxed{x = \frac{5-\lambda}{5},\quad y = \frac{3}{5}\lambda,\quad z = \lambda}$$

---

2 2p

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}$

c) $C \cdot (A + B^t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 8 & 14 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}}$

d) $C^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}}$

$$|C| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 2 = -6$$

$$C^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Adj}\,C^t = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & +1 & -4 \end{pmatrix}$$

---

3 2'5p

$$AX + B = 2C \rightarrow AX = 2C - B \rightarrow X = A^{-1}\cdot(2C-B) = \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = -2 \qquad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Adj}\,A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ C = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\rangle\ 2C - B = 2\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

---

4 2'5

x: "lo que paga el padre"
y: "lo que paga el hijo mayor"
z: "lo que paga el hijo menor"

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ x = 3(y+z) \\ 2y = 3z \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} (-1)\ x + y + z = 100 \\ x - 3y - 3z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ -4y - 4z = -100 \\ (2)\ 2y - 3z = 0 \end{array}\right\} \sim$$

$$\begin{array}{l} x + y + z = 100 \rightarrow x = 100 - 15 - 10 = 75 \\ -4y - 4z = -100 \rightarrow -4y - 4\cdot 10 = -100 \rightarrow 4y = 60 \rightarrow y = 15 \\ -10z = -100 \rightarrow z = 10 \end{array}$$

Solución: padre: 75 € / Hijo mayor: 15 € / Hijo menor: 10 €

---

6 1p

$$\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15\cdot\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

La 1ª fila es múltiplo de 5
La 2ª fila es múltiplo de 3

La F_3 se cambia por $F_3 + F_1$

Porque 2 Filas son iguales $F_2 = F_3$