



## PAU MATEMÀTIQUES II. SETEMBRE 2006

### EXERCICI A

**PROBLEMA 1.** Donat el sistema d'equacions amb un paràmetre real  $\lambda$  i incògnites  $x, y, z$ ,

$$\begin{cases} (\lambda+2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda+6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda-2)z = 0 \end{cases} \text{ es demana:}$$

- a) Calculeu per a quins valors de  $\lambda$  el sistema només admet la solució  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  (1 punt).  
b) Per a cada valor de  $\lambda$  que fa indeterminat el sistema, obteniu totes les seues solucions (1,8 punts).  
c) Expliqueu la posició relativa dels tres plans definits per cadascuna de les equacions del sistema quan  $\lambda = -3$  (0,5 punts).

**Solució.-**

a) Serà per als valors de  $\lambda$  que facen compatible determinat el sistema, per tant haurà de ser:

$$0 \neq \begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda$$

Les arrels d'aquest polinomi són  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 = -3$ .

Per tant el sistema admet la solució única  $(0, 0, 0)$  per a tots els valors de  $\lambda$  diferents de 0 i de  $-3$ .

b)

-per a  $\lambda = 0 \rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & -3 \\ 5 & 5 & -2 \end{pmatrix} = 2$ ; un menor principal  $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 15 \rightarrow$  el sistema seria

$$\text{equivalent a } \begin{cases} 2x - y = -z \\ 3x + 6y = 3z \end{cases} \text{ que, resolt per Cramer, dóna: } \left. \begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 3\lambda & 6 \end{vmatrix}}{15} = -\frac{\lambda}{5} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 3 & 3\lambda \end{vmatrix}}{15} = \frac{3\lambda}{5} \\ z &= \lambda \end{aligned} \right\} \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

-per a  $\lambda = -3 \rightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = 1 \rightarrow$  el sistema seria equivalent a  $\{-x - y + z = 0\}$ . La

$$\text{solució general seria: } \begin{cases} x = -\lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

c) Com per a  $\lambda = -3$ , les tres equacions són equivalents, es tracta de tres plans coincidents.



**PROBLEMA 2.** En l'espai es consideren:

- La recta  $r$  intersecció dels plans d'equacions implícites  $2x - 2y - z = 9$  i  $4x - y + z = 42$ .  
► I la recta  $s$  que passa pels punts  $(1, 3, -4)$  i  $(3, -5, -2)$ . Es demana:  
a) Calculeu les equacions paramètriques de la recta  $r$  (0,8 punts) i de la recta  $s$  (0,3 punts).  
b) Justifiqueu que les rectes  $r$  i  $s$  s'encreuen (0,8 punts).  
c) Calculeu un vector direccional de la recta  $t$ , perpendicular comú a les rectes  $r$  i  $s$ , (0,4 punts) i calculeu el punt  $P$  d'intersecció de les rectes  $s$  i  $t$  (1 punt).

**Solució.-**

a) Les equacions paramètriques de  $r$  les obtenim resolent el sistema  $\begin{cases} 2x - 2y - z = 9 \\ 4x - y + z = 42 \end{cases}$ , que

$$\text{dóna com a solució general } \begin{cases} x = \lambda \\ y = -17 + 2\lambda \\ z = 25 - 2\lambda \end{cases}$$

El vector direcció de la recta  $s$  és:  $(2, -8, 2)$ , o bé simplificat  $(1, -4, 1)$ . Aleshores, les

$$\text{equacions paramètriques: } \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 - 4\mu \\ z = -4 + \mu \end{cases}$$

b) Les direccions de les rectes, respectivament  $(1, 2, -2)$  i  $(1, -4, 1)$  són distintes. Si tingueren un punt comú, el sistema següent hauria de ser compatible:

$$\begin{cases} 1 + \mu = \lambda \\ 3 - 4\mu = -17 + 2\lambda \\ -4 + \mu = 25 - 2\lambda \end{cases}$$

però eliminant  $\lambda$  i simplificant, queda que  $\begin{cases} \mu = 3 \\ \mu = 9 \end{cases}$ , és a dir, el sistema és incompatible. Per tant les

rectes es creuen.

c) El vector de la recta  $t$  és el producte vectorial dels vectors de  $r$  i  $s$ :

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} = (-6, -3, -6), \text{ o bé simplificat: } (2, 1, 2).$$

El punt  $P$  serà la intersecció de  $s$  amb el pla que determinen  $r$  i  $\vec{t}$ , l'equació del qual serà:

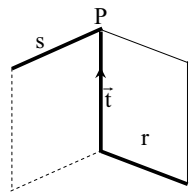
$$\begin{vmatrix} x & y+17 & z-25 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - z - 9 = 0$$

Substituint les equacions paramètriques de  $s$  en aquest pla:

$$2(1 + \mu) - 2(3 - 4\mu) - (-4 + \mu) - 9 = 0 \Leftrightarrow \mu = 1 \rightarrow P = (2, -1, -3)$$

**PROBLEMA 3.** Donades les funcions  $f(x) = x^3 - 3x + 8$  i  $g(x) = -3x$ , es demana:

- a) Calculeu el màxim absolut de la funció  $f(x)$  en l'interval  $[-3, 0]$  (1 punt).  
b) Calculeu el punt de tall de la corba  $y = f(x)$  i la recta  $y = g(x)$  (1 punt).  
c) Obteniu l'àrea del recinte limitat per la corba  $y = f(x)$  i les rectes  $y = g(x)$ ,  $x = -3$  i  $x = 0$  (1,3 punts).





**Solució.-**

a)  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$ .

$f''(x) = 6x \begin{cases} f''(1) = 6 > 0 \rightarrow \text{en el punt 1 agafa un mínim relatiu} \\ f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow \text{en el punt -1 agafa un màxim relatiu} \end{cases}$

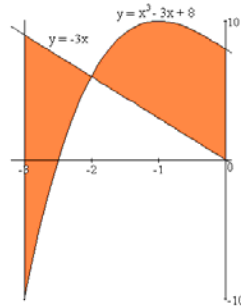
El valor de la funció en el màxim relatiu és  $f(-1) = 10$ . A més a més, el valor de la funció en els extrems de l'interval (on podria agafar algun màxim absolut) són:  $\begin{cases} f(-3) = -10 \\ f(0) = 8 \end{cases}$ .

Per tant,  $f$  agafa el màxim absolut en el punt  $x = -1$  i el seu valor és 10.

b) Igualant les equacions respectives, hem de resoldre l'equació:  $x^3 - 3x + 8 = -3x \rightarrow x = -2$ . Aleshores el punt buscat és  $(-2, f(-2)) = (-2, 6)$ .

c) El recinte, l'àrea del qual hem de calcular, està representat en la figura

$$\int_{-3}^{-2} (-3x - x^3 + 3x - 8) dx + \int_{-2}^0 (x^3 - 3x + 8 + 3x) dx = \left[ -\frac{x^4}{4} - 8x \right]_{-3}^{-2} + \left[ \frac{x^4}{4} + 8x \right]_{-2}^0 = \frac{81}{4}$$



**PROBLEMA 4.** Un incendi s'estén en forma circular uniformement. El radi del cercle cremat creix a la velocitat constant d'1,8 m/min.

a) Obteniu l'àrea cremada en funció del temps  $t$  transcorregut des de l'inici de l'incendi (1,3 punts).

b) Calculeu la velocitat de creixement de l'àrea del cercle cremat en l'instant en què el radi arribi als 45 m (2 punts).

**Solució.-**

a)  $S = \pi(1,8t)^2 = 3,24\pi t^2 \text{ m}^2$  (t en minuts)

b) La velocitat de creixement de l'àrea serà:

$$V(t) = \frac{dS}{dt} = 6,48\pi \text{ m}^2/\text{min}$$

El temps passat quan el radi siga 45 m, serà:

$$1,8t = 45 \rightarrow t = \frac{45}{1,8} = 25 \text{ min}$$

La velocitat de creixement de l'àrea cremada als 25 minuts serà:

$$V(25) = 6,48 \cdot \pi \cdot 25 = 162\pi \text{ m}^2/\text{min} \cong 508,94 \text{ m}^2/\text{min}$$

**EXERCICI B**

**PROBLEMA 1.**  $A$  és una matriu  $3 \times 3$  tal que  $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  i  $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ . Es demana:

a) Calculeu el determinant de la matriu  $A^3$  (0,5 punts) i la matriu inversa de  $A^3$  (1 punt).

b) Calculeu la matriu fila  $X = (x, y, z)$  que és solució de l'equació matricial  $XA^3 = BA^2$ , en què  $B$  és la matriu fila  $B = (1, 2, 3)$  (1,3 punts).

c) Calculeu la matriu inversa de  $A$  (0,5 punts).



**Solució.-**

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (\text{per la regla de Sarrus}) = 3 - 8 + 4 = -1$

$$(A^3)^{-1} = \frac{1}{-1} \text{Adj}(A^3) = -\text{Adj} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b)  $X = B \cdot A^2 \cdot (A^3)^{-1} = (1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-3 \ -2 \ 4) \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (5 \ 6 \ 2)$ .

c) Com  $A^3 \cdot (A^{-1})^3 = A \cdot A \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^{-1} = I \rightarrow (A^{-1})^3 = (A^3)^{-1}$ . Aleshores:

$$A^{-1} = A^2 \cdot (A^3)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**PROBLEMA 2.** En l'espai es consideren:

➤ El pla  $\pi$  que passa pels punts  $(11, 1, 2)$ ,  $(5, 7, 5)$  i  $(7, -1, -2)$ .

➤ I la recta  $r$  intersecció dels plans d'equacions implícites  $x + y + z = 15$  i  $2x - 7y + 2z = 3$ .

a) Calculeu l'equació paramètrica de  $r$  (0,6 punts) i l'equació implícita del pla  $\pi$  (0,4 punts).

b) Calculeu el punt  $P$  intersecció de  $r$  i  $\pi$  (0,8 punts) i l'angle  $\alpha$  que determinen  $r$  i  $\pi$  (0,5 punts).

c) Calculeu els punts  $M$  i  $N$  de la recta  $r$  la distància al pla  $\pi$  dels quals és igual a 3 u.l. (1 punt).

**Solució.-**

a) L'equació paramètrica de  $r$  l'obtenim del sistema  $\begin{cases} x + y + z = 15 \\ 2x - 7y + 2z = 3 \end{cases} \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 15 \\ -9y = -27 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 15 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 12 - \lambda \\ y = 3 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Dos vectors del pla  $\pi$  són:

$$\begin{cases} (5,7,5) - (11,1,2) = (-6,6,3) \text{ que simplificat queda } (-2,2,1) \\ (7,-1,-2) - (11,1,2) = (-4,-2,-4) \text{ que simplificat queda } (-2,1,2) \end{cases}$$

Per tant l'equació implícita de  $\pi$ :  $\begin{vmatrix} x-11 & y-1 & z-2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \leftrightarrow x + 2y - 2z - 9 = 0$

b) Substituïm les equacions paramètriques de  $r$  en l'equació implícita de  $\pi$ :

$$12 - \lambda + 6 - 2\lambda - 9 = 0 \leftrightarrow \lambda = 3$$

Aleshores, les coordenades del punt  $P$   $(9, 3, 3)$ .

L'angle  $\alpha$  que formen  $r$  i  $\pi$  és el complementari de l'angle que forma  $r$  amb el vector normal a  $\pi$ . Aleshores:

$$\alpha = \arcsin \frac{(1,2,-2) \cdot (-1,0,1)}{\sqrt{9} \sqrt{2}} = \arcsin \frac{-1}{\sqrt{2}} \leftrightarrow \alpha = -45^\circ, \text{ o bé en valor absolut } |\alpha| = 45^\circ$$

c) La distància d'un punt de la recta  $r$  al pla  $\pi$  és:  $\frac{|12 - \lambda + 6 - 2\lambda - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|9 - 3\lambda|}{3} = |3 - \lambda|$ .

Igualant a 3:  $|3 - \lambda| = 3 \rightarrow 3 - \lambda = \pm 3 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \rightarrow \text{punt } M(12,3,0) \\ \lambda_2 = 6 \rightarrow \text{punt } N(6,3,6) \end{cases}$



**PROBLEMA 3.**

- a) **Obteniu** la derivada de la funció  $f(x) = ax + b + \sin x$  (0,5 punts). Calculeu  $a$  i  $b$  si  $O = (0, 0)$  és un punt de la corba  $y = ax + b + \sin x$ , la recta tangent de la qual en  $O = (0, 0)$  és l'eix  $OX$  (1,8 punts).
- b) **Justifiqueu** que la funció  $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \sin x$  s'anul·la en dos punts de l'interval  $[0, \pi]$  (0,5 punts).
- c) **Calculeu** aquests dos punts (0,5 punts).

**Solució.-**

a)  $f'(x) = a + \cos x$ .

Per ser  $O(0, 0)$  un punt de la corba, serà  $f(0) = 0 \leftrightarrow b = 0$

El pendent de la tangent és zero  $\leftrightarrow f'(0) = a + 1 = 0 \leftrightarrow a = -1$ .

b) La funció  $g(x)$  és contínua en l'interval  $[0, \pi]$  i compleix que  $g(0) = 0$  i  $g(\pi) = -2$ . Ja hem trobat un punt on  $g$  s'anul·la. Agafem ara un punt interior a l'interval, per exemple  $\frac{\pi}{6}$ , en el qual es compleix que  $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{2}{6} + \frac{1}{2} > 0$ . Aleshores, pel teorema de Bolzà, existeix un punt de l'interval  $\left[\frac{\pi}{6}, \pi\right]$  on la funció  $g$  s'anul·la.

c) Ja hem vist que  $g(0) = 0$ ; l'altre punt  $x$  que anul·la a  $g$  verificarà  $\sin x = \frac{2}{\pi}x$ . S'observa que aquesta equació es compleix per a  $x = \frac{\pi}{2}$ , és a dir  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

**PROBLEMA 4.**

Dos pals de 3 m i 4 m es troben clavats verticalment a terra. Les bases disten 5 m i, en el segment que les uneix, hi ha un punt  $P$  que dista  $x$  metres de la base del pal més baix. L'extrem superior de cada pal s'uneix amb  $P$  mitjançant un segment rectilini de cable. Es demana:

- a) **Obteniu** l'expressió  $f(x)$  de la longitud total de cable utilitzat en els dos segments (1,8 punts).
- b) **Demostreu** que aquesta longitud total de cable és mínima quan són iguals els valors absoluts dels pendents dels dos segments considerats (1 punt). Calculeu aquesta longitud mínima (0,5 punts).

**Solució.-**

a) Pel teorema de Pitàgores:

$$f(x) = \sqrt{9+x^2} + \sqrt{16+(5-x)^2}$$

b) Calculem la primera i la segona derivada de  $f(x)$ :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{5-x}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{9+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}}{9+x^2} - \frac{-\sqrt{16+(5-x)^2} + \frac{(5-x)^2}{\sqrt{16+(5-x)^2}}}{16+(5-x)^2} = \frac{9}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{16}{(16+(5-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

D'altra banda, per ser el valor absolut dels pendents iguals, es compleix:  $\frac{3}{x} = \frac{4}{5-x} \rightarrow$

$$\rightarrow x = \frac{15}{7}.$$



$$\text{Calculem } f'\left(\frac{15}{7}\right) = \frac{15}{7} - \frac{5 - \frac{15}{7}}{\sqrt{16 + \left(5 - \frac{15}{7}\right)^2}} = \frac{15}{\sqrt{666}} - \frac{20}{\sqrt{1184}} = \frac{5}{\sqrt{74}} - \frac{5}{\sqrt{74}} = 0.$$

Com  $f''(x) > 0, \forall x$ , resulta que  $f$  agafa un mínim relatiu per al valor  $\frac{15}{7}$ , que és absolut en l'interval  $[0, 5]$ .

Aleshores la longitud mínima seria :

$$f\left(\frac{15}{7}\right) = \sqrt{9 + \frac{225}{49}} + \sqrt{16 + \left(5 - \frac{15}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{666}}{7} + \frac{\sqrt{1184}}{7} = \sqrt{74} \text{ m.}$$